LINEAR MOMENTUM

תְּנֶעַ קווי

"שווּנג"

- מושג שימושי בבעיות עם התנגשויות

הגדרה

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (kg\ m\ s^{-1})$$

$$[\vec{p}] = [m][\vec{v}] = M L T^{-1}$$

$$\vec{F}^{NET} = m\vec{a} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

תרגיל

שחקן טניס מגיש כדור בעל מסה 0.060 kg. אחרי מגע של 4 ms עם המחבט הכדור נוסע במהירות 55 m/s. מה היה גודל הכוח הממוצע שהמחבט הפעיל על הכדור?

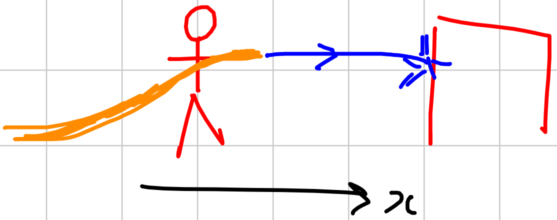
$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m v_2 - m \cancel{v_1}^{\,0}}{\Delta t} = \frac{0.06 \cdot 55}{4 \cdot 10^{-3}} = 825N$$

משקל הכדור הוא $W = mg \cong 0.6N$ (זניח!)

הכוח הממוצע הוא אפילו יותר גדול מהמשקל של שחקן במסה 80 kg!

תרגיל

בשטיפת מכונית, מים יוצאים מצינור במהירות 20 m/s, ואחרי שהם פוגעים בדופן המכונית, הם נעצרים. אם 1.5 kg של מים יוצאים מהציור כל שנייה, חשבו את הכוח שהמים מפעילים על המכונית.



$$\vec{v}_i = 20\,m/s\,\hat{i}$$
$$\vec{v}_f = 0\,m/s\,\hat{i}$$

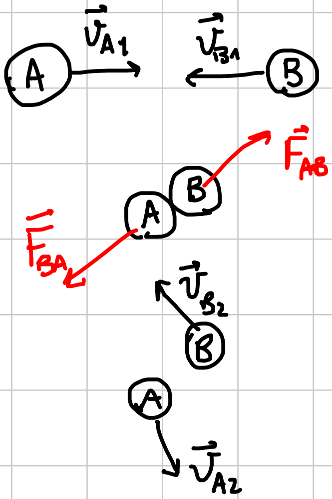
$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\cancel{\vec{v}_f}^{\,0} - m\vec{v}_i}{\Delta t} = -\frac{m\vec{v}_i}{\Delta t} = -\frac{1.5\cdot 20}{1}\hat{i}$$

$$\vec{F} = -30\,\hat{i}\,N$$

$-30\hat{i}N$ הוא הכוח שפועל על המים, המים מפעילים כוח של $+30\hat{i}N$ על המכונית

שני כדורים A ו-B מתנגשים.

(1) לפני



(2) אחרי

חוק שני של ניוטון

$$\vec{F}_{BA} = \frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_{A2} - \vec{p}_{A1}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{AB} = \frac{\Delta \vec{p}_B}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_{B2} - \vec{p}_{B1}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

חוק שלישי של ניוטון

$$\frac{\vec{p}_{A2} - \vec{p}_{A1}}{\cancel{\Delta t}} = -\left(\frac{\vec{p}_{B2} - \vec{p}_{B1}}{\cancel{\Delta t}}\right)$$

$$\boxed{\vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2}}$$

תנע לפני   תנע אחרי

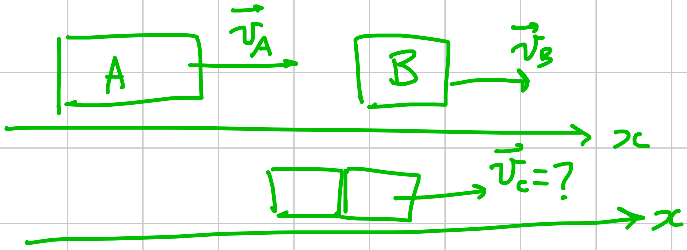
חוק שימור התנע הקווי

- לא משנה מה היה משך ההתנגשות
- תקף רק כאשר פועלים <u>כוחות פנימיים בלבד</u>
- כמעט תמיד קיימים כוחות חיצוניים, לכן שימור תנע יתקיים עבור $\Delta t \to 0$, ואין זמן לכוחות חיצוניים לשנות את התנע, הם זניחים במשך ההתנגשות.

קיימת חשיבות רבה בקביעת המערכת שלנו.
אילו כוחות נחשבים לפנימיים וחיצוניים?

תרגיל

שני קרונות רכבת מתנגשים ונדבקים זה לזה. לשניהם מסה 10 טונות. לפני ההתנגשות הקרון הראשון נסע במהירות 24 m/s, והשני נסע במהירות 16 m/s. מה תהיה מהירות הקרונות אחרי ההתנגשות?



$m = 10 \cdot 10^3 kg$
$v_A = 24\ m/s$
$v_B = 16\ m/s$
$v_c = ?$

BEFORE: $\vec{P}_1 = \vec{P}_A + \vec{P}_B = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$

AFTER: $\vec{P}_2 = (m_A + m_B)\vec{v}_c = (m_A + m_B) v_c \hat{i}$

חוק שימור תנע: $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$

$$m_A v_A \hat{i} + m_B v_B \hat{i} = (m_A + m_B) v_c \hat{i}$$

$$\boxed{v_c = v_A \frac{m_A}{m_A + m_B} + v_B \frac{m_B}{m_A + m_B}} = 24 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{2} = 20\ m/s$$

מה היה קורה אילו $v_B = 0$ ו- $m_A >> m_B$? $m_A << m_B$?

תרגיל

האם אדם יכול לעוף אחורה כתוצאה מירי של כדור, כפי שרואים בסרטים? נתונים: מסת האדם 70 kg, מסת הקליע 55 g, מהירות הלוע של הרובה 900 m/s.

השאלה הבאה דומה מאוד לתרגיל למעלה:

מהירות האדם: $v_B=0$

מסת האדם: $m_B=70kg$

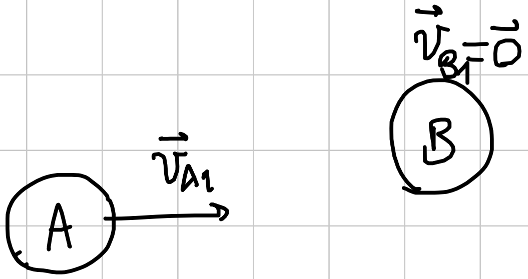
מהירות הקליע: $v_A=900\ m/s$

מסת הקליע: $m_A=55g=55\cdot10^{-3}kg$

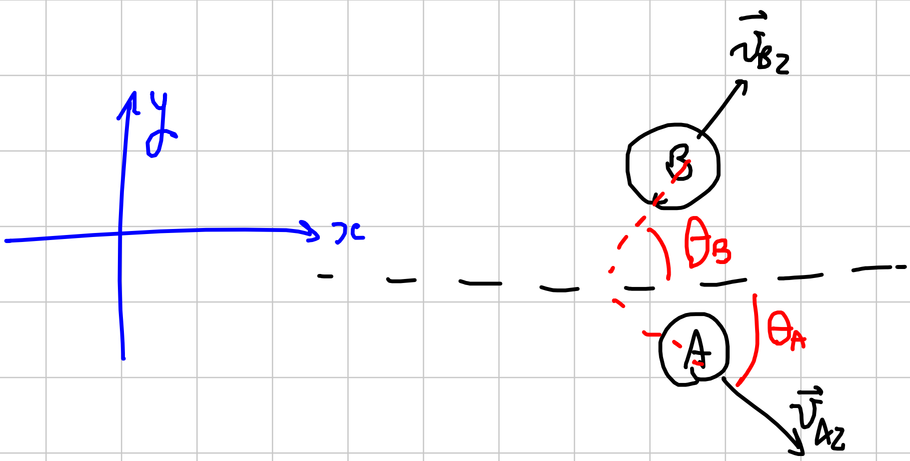
$$v_c = v_A\underbrace{\frac{m_A}{m_A+m_B}}_{0.08\%}+\cancelto{0}{v_B}\frac{m_B}{m_A+m_B}=0.7m/s$$

התנגשות בשני מימדים:

לפני (1)



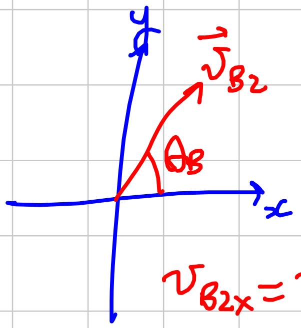
אחרי (2)



$v_{A2}, v_{B2} = ?$

$$\vec{p}_1 = m_A \vec{v}_{A_1} + m_B \cancel{\vec{v}_{B_1}}^{\,0} = m_A v_{A_1} \hat{i}$$

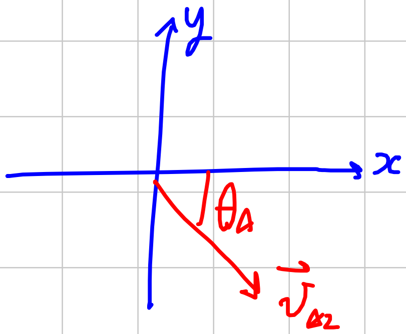
$$\vec{p}_2 = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2}$$



$v_{B2x} = v_{B2} \cos \theta_B$

$v_{B2y} = v_{B2} \sin \theta_B$

$\vec{v}_{B2} = v_{B2x} \hat{i} + v_{B2y} \hat{j}$



$v_{A2x} = v_{A2} \cos \theta_A$

$v_{A2y} = v_{A2} \sin \theta_A$

$\vec{v}_{A2} = v_{A2x} \hat{i} - v_{A2y} \hat{j}$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

$$m_A v_{A_1} \hat{i} = m_A v_{A2x} \hat{i} - m_A v_{A2y} \hat{j} + m_B v_{B2x} \hat{i} + m_B v_{B2y} \hat{j}$$

ציר x: $\quad m_A v_{A_1} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$

ציר y: $\quad 0 = -m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$

$$m_A v_{A2y} = m_B v_{B2y}$$

$$m_A v_{A2} \sin \theta_A = m_B v_{B2} \sin \theta_B$$

$$m_A v_{A_1} = m_{A2} v_{A2} \cos \theta_A + m_B v_{B2} \cos \theta_B$$

שתי משוואות
שני נעלמים
v_{A2}, v_{B2}

נפשט קצת את הבע"ה:

$m_A = m_B = m$

$\theta_A = \theta_B = \theta$

אפשר למצוא כ'

$v_{A2} = v_{B2}$

$v_{A_1} = 2 v_{A2} \cos \theta$

$$\boxed{v_{A2} = v_{B2} = v_{A_1} \frac{1}{2\cos \theta}}$$

$\vec{J}$ מִתְקָף IMPULSE

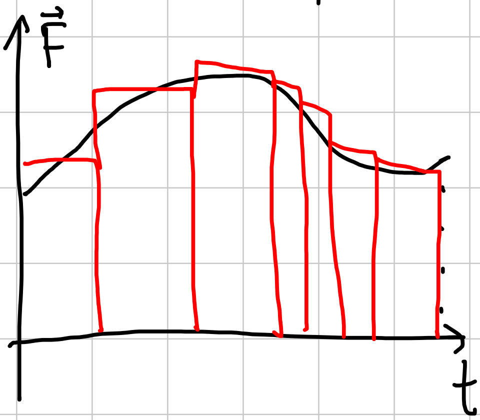
$$\vec{F}^{NET} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}^{NET} \Delta t = \vec{J}$$ מתקף

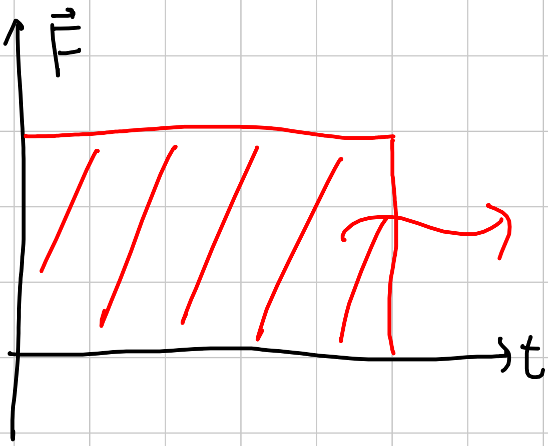
מתקף הוא שינוי התנע הקווי, $\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$,
ואפשר לחשב אותו בעזרת

$$\vec{J} = \vec{F}^{NET} \Delta t$$

עבור כוח קבוע בזמן, ובאופן כללי $\vec{J}$ הוא
השטח בין $\vec{F}(t)$ לציר הזמן בגרף F-t:



$$\vec{J} = \int \vec{F} dt$$



$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

מתקף $\vec{J}$ הוא העברת תנע קווי מגוף אחד לגוף אחר. אפשר להגיד שמשהו (או מישהו) מפעיל/עושה מתקף על משהו אחר.

נחזור לדוגמה של הירי. בהתחלה הכדור והנשק במנוחה:

$$\vec{P}_{1,\text{כדור}} = \vec{P}_{1,\text{נשק}} = \vec{0}$$

הנשק מפעיל כוח על הכדור, ומקנה לו תנע:

$$\vec{P}_{2,\text{כדור}} = m_{\text{כדור}} \cdot \vec{v}_{2,\text{כדור}}$$

מה התנע שהופעל על הכדור בין מצב (1) ל-(2)?

$$\vec{J}_{\text{כדור}} = \Delta\vec{P}_{\text{כדור}} = \vec{P}_{2,\text{כדור}} - \vec{P}_{1,\text{כדור}} = m\vec{v}_{2,\text{כדור}}$$

ומה המתקף שהכדור הפעיל על הנשק? אם ניקח את הכדור + נשק כמערכת, ברור שהתנע הקווי לא ישתנה בין (1) ל-(2):

$$\vec{P}_{1,\text{כולל}} = \vec{P}_{2,\text{כולל}} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_{2,\text{נשק}} + \vec{P}_{2,\text{כדור}} = 0 \longrightarrow \vec{P}_{2,\text{נשק}} = -\vec{P}_{2,\text{כדור}} = -m\vec{v}_{2,\text{כדור}}$$

$$\vec{J}_{\text{נשק}} = \Delta\vec{P}_{\text{נשק}} = \vec{P}_{2,\text{נשק}} - \vec{P}_{1,\text{נשק}} = -m\vec{v}_{2,\text{כדור}}$$

מסקנה:
$$\vec{J}_{\text{נשק}} = -\vec{J}_{\text{כדור}}$$

כפי שציפינו, הרי חוק שימור התנע נובע מהחוק השלישי של ניוטון.

20. Superball Hits Wall Figure 7-24 shows an approximate plot of force magnitude versus time during the collision of a 58 g Superball with a wall. The initial velocity of the ball is 34 m/s perpendicular to the wall; it rebounds directly back with approximately the same speed, also perpendicular to the wall. What is F^{max}, the maximum magnitude of the force on the ball from the wall during the collision?

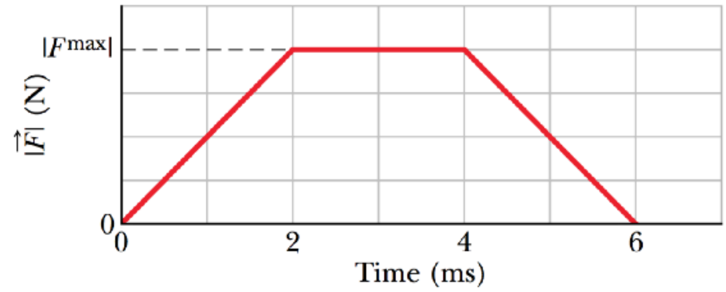
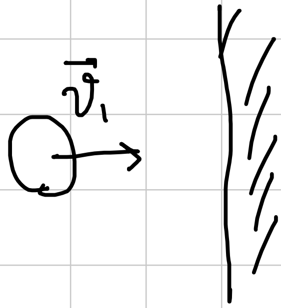
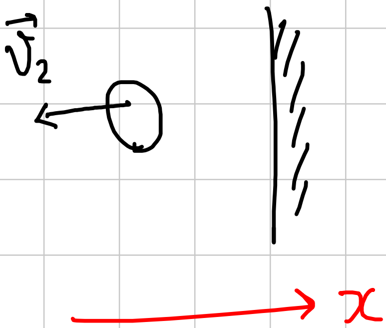


FIGURE 7-24 ■ Problem 20.

(1) לפני



(2) אחרי



$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{i} \qquad v = v_1 = v_2 = 34\,m/s$$

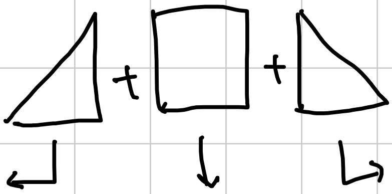
$$\vec{v}_2 = -v_2 \hat{i} \qquad m = 58\,g = 58 \cdot 10^{-3}\,kg$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$= m(-v_2 - v_1)\hat{i} = -2mv\hat{i}$$

$\vec{J} = \Delta\vec{p} =$ שטח בגרף F-t

שטח הגרף:



$$2 \cdot 10^{-3} \cdot F^{MAX} \cdot \frac{1}{2} \qquad 2 \cdot 10^{-3} \cdot F^{MAX} \qquad 2 \cdot 10^{-3} \cdot F^{MAX} \cdot \frac{1}{2}$$

$$J = 3 \cdot 10^{-3} \cdot F^{MAX}$$

כאן מדובר בגודל המתקף,
מכיוון שחישבנו בעזרת גודל הכוח.

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = -2mv\hat{i} \longrightarrow |\vec{J}| = J = 2mv$$

$$3 \cdot 10^{-3} \cdot F^{MAX} = 2mv \longrightarrow \boxed{F^{MAX} = \frac{2mv}{3 \cdot 10^{-3}} = 1315\,N}$$

18. (II) A tennis ball of mass $m = 0.060$ kg and speed $v = 28$ m/s strikes a wall at a 45° angle and rebounds with the same speed at 45° (Fig. 7–32). What is the impulse (magnitude and direction) given to the ball?

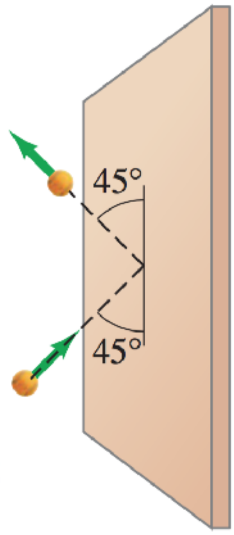
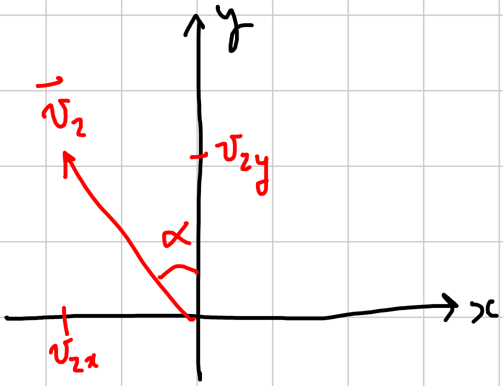
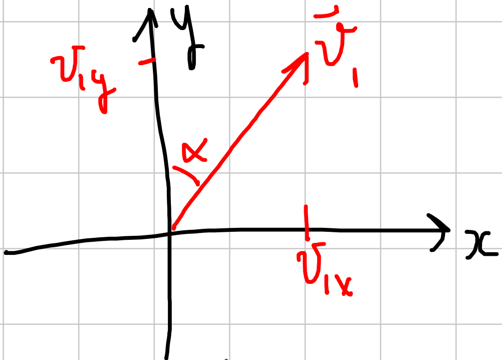


FIGURE 7–32
Problem 18.

סעיף (1)





$v_{1x} = v_1 \sin\alpha$

$v_{1y} = v_1 \cos\alpha$

$\vec v_1 = v_{1x}\hat i + v_{1y}\hat j$

$v_{2x} = v_2 \sin\alpha$

$v_{2y} = v_2 \cos\alpha$

$\vec v_2 = -v_{2x}\hat i + v_{2y}\hat j$

$$\vec J = \vec{\Delta p} = \vec p_2 - \vec p_1 = -m v_{2x}\hat i + m v_{2y}\hat j - m v_{1x}\hat i - m v_{1y}\hat j$$

$$= -m(v_2 \sin\alpha + v_1 \sin\alpha)\hat i + m(v_2\cos\alpha - v_1\cos\alpha)\hat j$$

$$\vec J = -m(v_2 + v_1)\sin\alpha\,\hat i + m(v_2 - v_1)\cos\alpha\,\hat j$$

נתון כי $v = v_1 = v_2$

$$\vec J = -2mv\sin\alpha\,\hat i$$

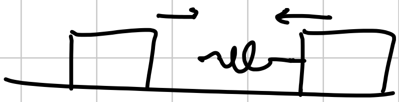
כיוון: $-\hat i$, כלפי שמאל

גודל: $2mv\sin\alpha = 3.36\ kg\,m\,s^{-1}$

סוגים שונים של התנגשות

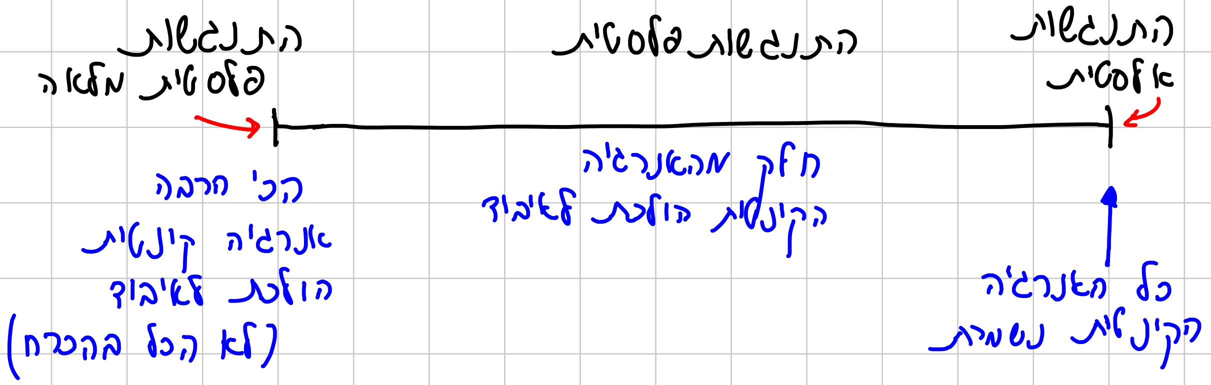
- התנגשות אלסטית

האנרגיה הקינטית של המערכת נשמרת. קוראים להתנגשות "אלסטית" כי נראה כאילו יש קפיץ (כוח אלסטי) בין הגופים.
הכוח האלסטי משמר אנרגיה, וגם בהתנגשות אלסטית האנרגיה הקינטית נשמרת.



- התנגשות פלסטית

אין שימור אנרגיה קינטית, חלק מהאנרגיה הופך לחום, גלי קול, וכו'. במקרה ששני הגופים נדבקים זה לזה, קוראים לזה **התנגשות פלסטית מלאה.**



תרגיל

בדוגמה של האקדח שנורה, כמה אנרגיה הפכה לחום?
איזה אחוז של האנרגיה הפך לחום?

קיבלנו אז כי:

$$v_c = v_A \frac{m_A}{m_A+m_B}$$

$$E_1 = \frac{m_A v_A^2}{2} = 22275 J$$

$$E_1 - E_2 = 22258 J$$

$$E_2 = \frac{(m_A+m_B) v_c^2}{2} = \frac{\cancel{(m_A+m_B)} v_A^2 m_A^2}{2(m_A+m_B)^{\cancel{2}}} = 17.5 J$$

$$\frac{E_1-E_2}{E_1} = 99.92\%$$ "התבזבז"

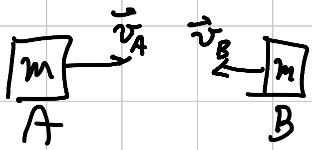
ELASTIC COLLISIONS
התנגשויות אלסטיות

כבר למדנו על התנגשויות פלסטיות. אלה התנגשויות ששני הגופים נדבקים זה לזה.

__דוגמה 1__

$\vec{v}_A = -\vec{v}_B$

$m_A = m_B$



לפני (1)

אחרי (2)

$$\vec{p}_1 = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}_A + m_A(-\vec{v}_A) = 0 \longrightarrow$$

לפי שימור תנע קווי:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = 0$$

$$\vec{p}_2 = 2m\cdot\vec{v}_c = 0$$

$$\underline{\vec{v}_c = 0}$$

מה לגבי האנרגיה הקינטית?

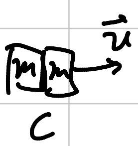
$$K_1 = \frac{m_A v^2}{2} + \frac{m_B v^2}{2} = m v^2 \qquad K_2 = \frac{(m_A+m_B)v_c^2}{2} = 0$$

$$W^{NET} = \Delta K = K_2 - K_1 = -K_1 = -mv^2 < 0$$

נעשתה עבודה שלילית ע"י כח אל מגע, לכן האנרגיה המכנית (ובפרט הקינטית) קטנה. למעשה __כל__ האנרגיה התבזבזה, והפכה לסוגים אחרים של אנרגיה (צליל, חום, וכו)

__דוגמה 2__

לפני (1)



אחרי

שימור תנע

$\vec{p}_1 = m\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{p}_2 = 2m\vec{u}$

$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \to m\vec{v} = 2m\vec{u} \to \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$

אנרגיה קינטית

$K_1 = \frac{mv^2}{2}$ $\qquad$ $K_2 = \frac{(2m)u^2}{2} = m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{mv^2}{4}$

$$W^{NET} = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{mv^2}{4} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{4} < 0$$

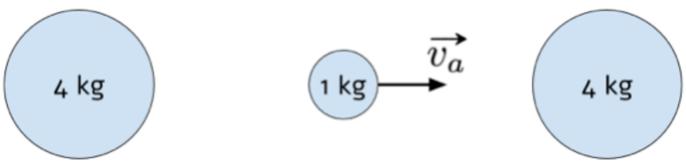
שוב הייתה עבודה שלילית שגרמה לירידה באנרגיה הקינטית, אך הפעם לא הכל התבזבז...

התנגשות אלסטית

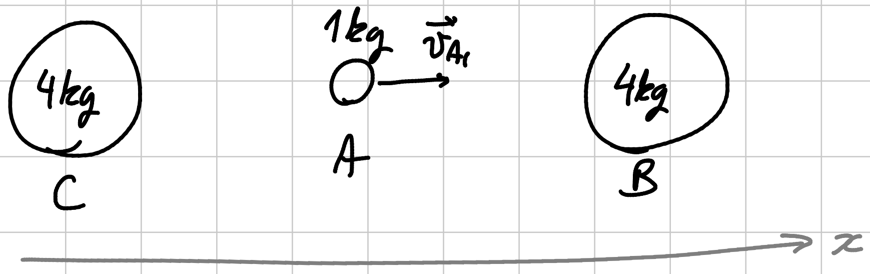
האנרגיה הקינטית K נשמרת

תרגיל

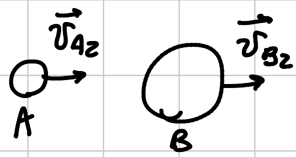
שני כדורים זהים שמסתם 4 kg נמצאים במנוחה (ראו איור). כדור שמסתו 1 kg נע במהירות 5 m/s ומתנגש התנגשות אלסטית באחד מהכדורים. כמה התנגשויות יהיו?



לפני



אחרי



שימור תנע קווי

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

$$(1) \qquad m_A\vec{v}_{A1} = m_A\vec{v}_{A2} + m_B\vec{v}_{B2}$$

שימור אנרגיה קינטית

$$(2) \qquad \frac{m_A v_{A1}^2}{\cancel{2}} = \frac{m_A v_{A2}^2}{\cancel{2}} + \frac{m_B v_{B2}^2}{\cancel{2}}$$

נסדר את (1) מחדש:

$$(3) \quad m_A\left(v_{A_1}-v_{A_2}\right)=m_B v_{B_2}$$

נסדר את (2) מחדש:

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$m_A\left(v_{A_1}^2-v_{A_2}^2\right)=m_B v_{B_2}^2$$

$$(4) \quad m_A\left(v_{A_1}-v_{A_2}\right)\left(v_{A_1}+v_{A_2}\right)=m_B v_{B_2}^2$$

נציב את (3) ב-(4):

$$\cancel{m_B}\,\cancel{v_{B_2}}\left(v_{A_1}+v_{A_2}\right)=\cancel{m_B}\,v_{B_2}^{\cancel{2}}$$

$$(5) \quad v_{A_1}+v_{A_2}=v_{B_2}$$

נציב את (5) ב-(3):

$$m_A\left(v_{A_1}-v_{A_2}\right)=m_B\left(v_{A_1}+v_{A_2}\right)$$

$$m_A v_{A_1}-m_A v_{A_2}=m_B v_{A_1}+m_B v_{A_2}$$

$$v_{A_1}\left(m_A-m_B\right)=v_{A_2}\left(m_A+m_B\right)$$

$$(6) \quad \boxed{v_{A_2}=v_{A_1}\frac{\left(m_A-m_B\right)}{\left(m_A+m_B\right)}}$$

נציב את (6) ב-(5):

$$v_{A_1}+v_{A_1}\frac{\left(m_A-m_B\right)}{m_A+m_B}=v_{B_2}$$

$$v_{B_2}=v_{A_1}\left[1+\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}\right]=v_{A_1}\left(\frac{m_A+\cancel{m_B}+m_A-\cancel{m_B}}{m_A+m_B}\right)$$

$$(7) \quad \boxed{v_{B_2}=v_{A_1}\frac{2m_A}{m_A+m_B}}$$

בהתנגשות הראשונה, בין A ל-B:

$$\begin{cases} m_A=1kg \\ m_B=4kg \\ v_{A_1}=5m/s \end{cases}$$

שמאלה

$$v_{A_2}=5\frac{(1-4)}{1+4}=-3m/s$$

ימינה

$$v_{B_2}=5\cdot\frac{2\cdot 1}{1+4}=2m/s$$

בהתנגשות השניה, בין A ל-C:

$$\begin{cases} m_A=1kg \\ m_C=4kg \\ v_{A_1}=-3m/s \end{cases}$$

ימינה

$$v_{A_2}=-3\frac{(1-4)}{1+4}=+1.8m/s$$

שמאלה

$$v_{C_2}=-3\cdot\frac{2\cdot 1}{1+4}=-1.2m/s$$

יהיו 2 התנגשויות בסה"כ!

$$\boxed{v_{A2} = v_{A1}\,\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B} \qquad v_{B2} = v_{A1}\,\frac{2m_A}{m_A+m_B}}$$

מקרה 1

$m_A = m_B$

$v_{A2} = 0$

$v_{B2} = v_{A1}$

זה בדיוק מה שקורה ב"מטוטלת ניוטון"

מקרה 2

$m_B \gg m_A$

$$\lim_{m_B\to\infty} v_{A2} = \lim_{m_B\to\infty} v_{A1}\,\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B} = -v_{A1}$$

$$\lim_{m_B\to\infty} v_{B2} = \lim_{m_B\to\infty} v_{A1}\,\frac{2m_A}{m_A+m_B} = 0$$

מקרה 3

$m_A \gg m_B$

$$\lim_{m_A\to\infty} v_{A2} = \lim_{m_A\to\infty} v_{A1}\,\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B} = v_{A1}$$

$$\lim_{m_A\to\infty} v_{B2} = \lim_{m_A\to\infty} v_{A1}\,\frac{2m_A}{m_A+m_B} = 2v_{A1}$$

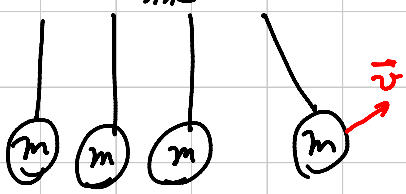
במטוטלת ניוטון מתקיים

לפני

$p_1 = mv$

$K_1 = \frac{mv^2}{2}$

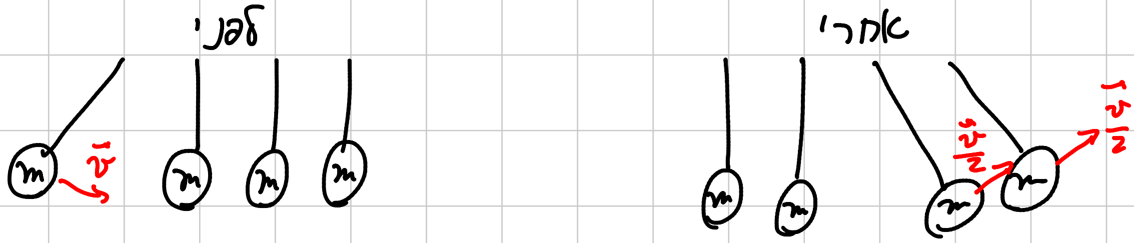
אחרי



$p_2 = mv$

$K_2 = \frac{mv^2}{2}$

האם יכול להיות מצב שכדור אחד משוחרר, אך שני כדורים יוצאים במהירות $\frac{v}{2}$? זה אפשרי?



$$p_1 = mv \qquad\qquad p_2 = 2\left(m\frac{v}{2}\right) = mv$$

$$K_1 = \frac{mv^2}{2} \qquad\qquad K_2 = 2\left(\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2\right) = \frac{mv^2}{4}$$

המצב הזה בלתי אפשרי. אומנם התנע נשמר, אבל האנרגיה הקינטית לא נשמרת.

התנגשות אלסטית בשני מימדים

ELASTIC COLLISION IN 2D

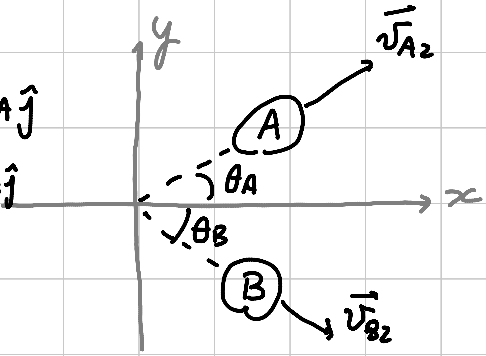
לפני

$\vec{v}_{A_1} = v_{A_1}\hat{i}$

אחרי

$\vec{v}_{A_2} = v_{A_2}\cos\theta_A\hat{i} + v_{A_2}\sin\theta_A\hat{j}$

$\vec{v}_{B_2} = v_{B_2}\cos\theta_B\hat{i} - v_{B_2}\sin\theta_B\hat{j}$



שימור תנע קווי:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \qquad (0)$$

$$\vec{p}_{A_1} = \vec{p}_{A_2} + \vec{p}_{B_2} \qquad (1)$$

$$m_A v_{A_1}\hat{i} = m_A v_{A_2}\cos\theta_A\hat{i} + m_A v_{A_2}\sin\theta_A\hat{j} + m_B v_{B_2}\cos\theta_B\hat{i} - m_B v_{B_2}\sin\theta_B\hat{j} \qquad (2)$$

שימור אנרגיה קינטית:

$$\frac{m_A v_{A_1}^2}{\cancel{2}} = \frac{m_A v_{A_2}^2}{\cancel{2}} + \frac{m_B v_{B_2}^2}{\cancel{2}} \qquad (3)$$

יש לנו 3 משוואות: 2 משוואות מתוך (2) על ציר x וציר y, ומשוואת (3). באופן עקרוני אפשר לפתור כל בעיה שיש בה שלושה נעלמים. בפועל קשה מאוד מבחינה אלגברית לפתור בעיות כאלה. מקרה פרטי שהוא פתיר הוא מצב שבו שתי המסות שוות: $m_A = m_B = m$

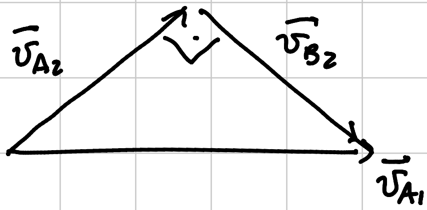
משוואה (1)

$$\cancel{m}\vec{v}_{A_1} = \cancel{m}\vec{v}_{A_2} + \cancel{m}\vec{v}_{B_2} \qquad (4)$$

משוואה (3)

$$\cancel{m}v_{A_1}^2 = \cancel{m}v_{A_2}^2 + \cancel{m}v_{B_2}^2 \qquad (5)$$

איזה מצב אנחנו מכירים שווקטור אחד הוא סכום של שניים אחרים (4), והגדלים של הווקטורים נתונים ע"י (5)?



זה מתקיים אך ורק
במשולש ישר-זווית!
מזה ניתן להסיק
שהזווית בין שתי המהירויות אחרי ההתנגשות $(\vec{v}_{A_2}, \vec{v}_{B_2})$ היא $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

זה המצב (כמעט) במשחק ביליארד, כאשר כל כדור צבעוני
בעל מסה $0.16\,kg$, והכדור הלבן בעל מסה $0.17\,kg$.

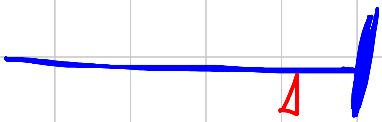
מרכז מסה

ממוצע משוקלל:

	GRADE	WEIGHT
בוחן	85	20%
תרגיל שבועי	100	10%
מועד סופי	80	70%

ממוצע: $\dfrac{85\cdot 20 + 100\cdot 10 + 80\cdot 70}{20+10+70} = 83$

איפה נמצא מרכז המסה של מגב?

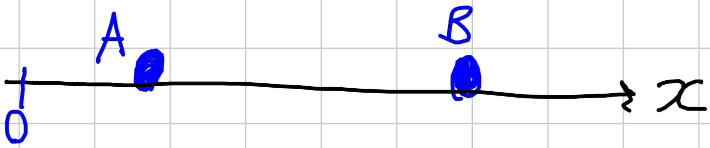


ברור שיותר קרוב לקצה הימני. מה שוקל יותר צריך להשפיע יותר על מיקום מרכז המסה.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

דוגמה

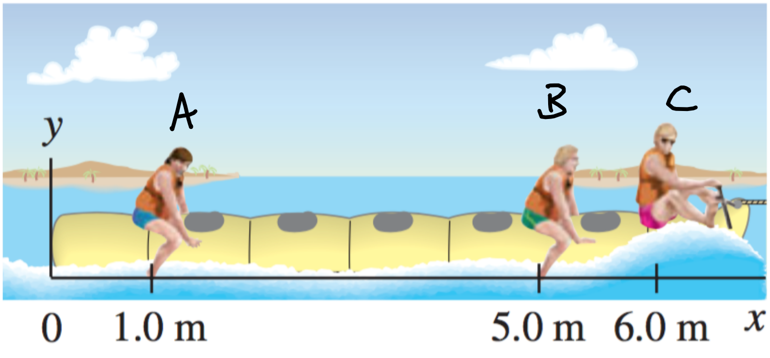
של שתי מסות שוות $\quad m_A = m_B = m$



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} = \frac{\cancel{m}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)}{2\cancel{m}} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

דוגמה: לכולם יש מסה m. איפה מרכז המסה?

$$\vec r_{cm} = \frac{m_A\vec r_A + m_B\vec r_B + m_C\vec r_C}{m_A + m_B + m_C}$$



$$\vec r_{cm} = \frac{\cancel{m}(1\hat i + 5\hat i + 6\hat i)}{3\cancel{m}}$$

$$\vec r_{cm} = \frac{12\hat i}{3} \rightarrow \vec r_{cm} = 4\hat i\ (m)$$

דוגמה

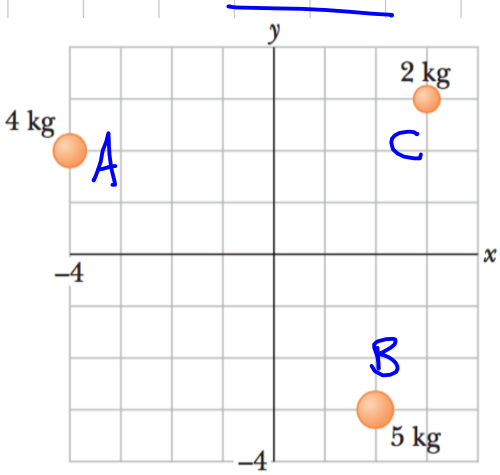
$m_A = 4kg \quad \vec r_A = -4\hat i + 2\hat j$

$m_B = 5kg \quad \vec r_B = 2\hat i - 3\hat j$

$m_C = 2kg \quad \vec r_C = 3\hat i + 3\hat j$

$$\vec r_{cm} = \frac{m_A\vec r_A + m_B\vec r_B + m_C\vec r_C}{m_A + m_B + m_C}$$

2. 2D Center of Mass of Three Objects Consider Fig. 8-14. Three masses located in the *x*-*y* plane have the following coordinates; a 5 kg mass has coordinates given by (2, −3) m; a 4 kg mass has coordinates (−4, 2) m; a 2 kg mass has coordinates (3, 3) m. Find the coordinates of the center of mass to two significant figures.



$$\vec r_{cm} = \frac{4(-4\hat i + 2\hat j) + 5(2\hat i - 3\hat j) + 2(3\hat i + 3\hat j)}{4+5+2} = \frac{-16\hat i + 8\hat j + 10\hat i - 15\hat j + 6\hat i + 6\hat j}{11}$$

$$\vec r_{cm} = \frac{(-16+10+6)\hat i + (8-15+6)\hat j}{11} = -\frac{1}{11}\hat j$$

אפשר להתייחס למרכז המסה כנקודה שמייצגת את כל המערכת. כאשר כוח חיצוני למערכת פועל על מרכיבי המערכת, אפשר לחשוב שכוח פועל על מרכז המסה בלבד:

המסה הכוללת

$$\vec{P}_{cm} = M \cdot \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{F}^{EXT} = \frac{\Delta \vec{P}_{cm}}{\Delta t}$$

דוגמה

27. Shell Explodes A shell is shot with an initial velocity $\vec{v}_1$ of 20 m/s, at an angle of 60° with the horizontal. At the top of the trajectory, the shell explodes into two fragments of equal mass (Fig. 8-26). One fragment, whose speed immediately after the explosion is zero, falls vertically. How far from the gun does the other fragment land, assuming that the terrain is level and that air drag is negligible?

$\alpha = 60°$

$v_1 = 20\ m/s$

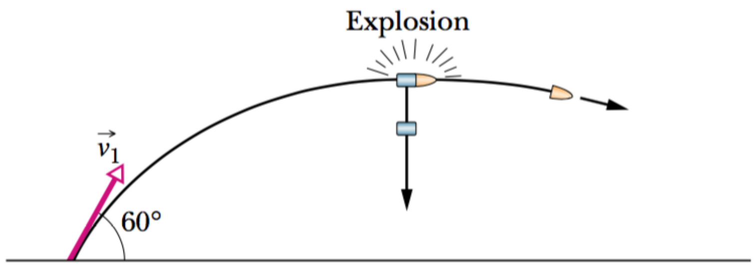
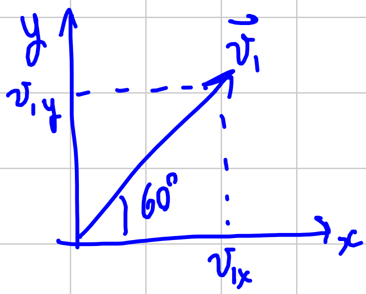


FIGURE 8-26 ■ Problem 27.

מרכז המסה עושה תנועה פרבולית, גם אחרי הפיצוץ!

איפה מרכז המסה "ינחת" על הקרקע?



$v_{1x} = v_1 \cos 60°$

$v_{1y} = v_1 \sin 60°$

$\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j}$

$\vec{r}_0 = \vec{0}$

$\vec{a} = -g\hat{j}$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{r}_{cm}(t) = v_{1x}t\hat{i} + v_{1y}t\hat{j} - \frac{g}{2}t^2\hat{j}$$

בזמן T מרכז המסה יפגע בקרקע: $\vec{r}_{cm}(T) = H\hat{i}$, כאשר H הוא טווח הפגיעה של מרכז המסה.

$$\vec{r}_{cm}(T) = H\hat{i} = v_{1x}T\hat{i} + v_{1y}T\hat{j} - \frac{g}{2}T^2\hat{j}$$

ציר x:

ציר y:

$$H = v_{1x} T$$

$$0 = v_{1y} T - \frac{g}{2} T^2$$

$$0 = T\left(v_{1y} - \frac{g}{2} T\right)$$

$$v_{1y} - \frac{g}{2} T = 0 \rightarrow T = \frac{2 v_{1y}}{g}$$

$$H = v_{1x} \cdot \frac{2 v_{1y}}{g} = 2 \sin\alpha \cos\alpha \frac{v_1^2}{g} = \sin(2\alpha) \frac{v_1^2}{g}$$

מה קורה לחלק שנופל ישר כלפי מטה? שיא המסלול נמצא בחצי מרחק הפגיעה H, מכיוון שכולם נופלים באותה התאוצה (מרכז המסה והחלק הראשון), בזמן T החלק הראשון יימצא בנקודה $(\frac{H}{2}, 0)$. איפה יהיה החלק השני מאותו הרגע?

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$H\hat{i} = \frac{\frac{H}{2}\hat{i} \cdot m + \vec{r}_2 m}{2m} = \frac{\cancel{m}}{2\cancel{m}}\left(\frac{H}{2}\hat{i} + \vec{r}_2\right)$$

$$2H\hat{i} = \frac{H}{2}\hat{i} + \vec{r}_2 \longrightarrow \boxed{\vec{r}_2 = \frac{3}{2} H \hat{i}}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{3}{2} H \hat{i} = \frac{3}{2} \sin(2\alpha) \frac{v_1^2}{g} = \frac{3}{2} \sin(120^\circ) \cdot \frac{20^2}{9.8} = 53m$$