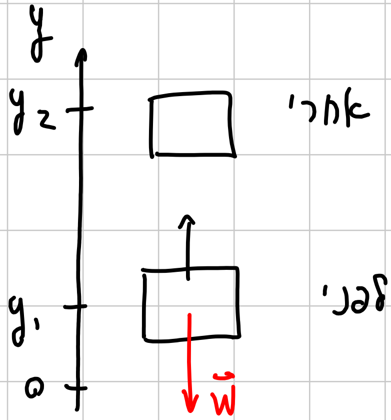
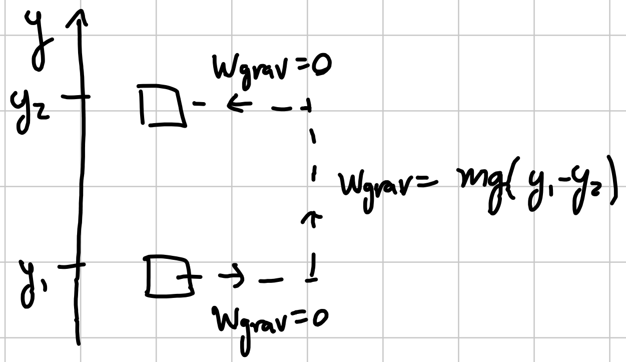
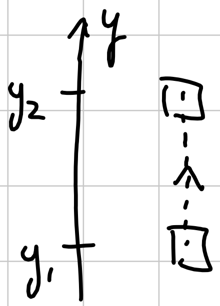
עבודה של כוח המשקל:



$$\vec{W} = -mg\,\hat{j}$$
$$\vec{d} = y_2\hat{j} - y_1\hat{j}$$
$$W_{grav} = \vec{F}\cdot\vec{d} = (-mg\hat{j})(y_2\hat{j} - y_1\hat{j})$$
$$W_{grav} = mgy_1 - mgy_2$$

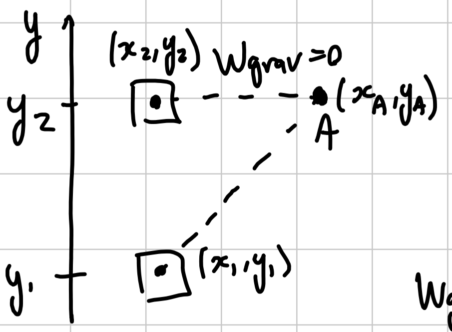
① העבודה של כוח המשקל לא תלויה במסלול





$\vec{W}=mg(y_1-y_2)$

כך יהיה נכון לכל מסלול



$$\vec{W} = -mg\hat{j}$$
$$\vec{d} = \vec{r}_A - \vec{r}_1 = (x_A\hat{i}+y_A\hat{j}) - (x_1\hat{i}+y_1\hat{j}) = (x_A-x_1)\hat{i} + (y_A-y_1)\hat{j}$$
$$W_{grav} = \vec{W}\cdot\vec{d} = (-mg\hat{j})\left[(x_A-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j}\right]$$
$$= mg(y_1-y_2)$$

② מכיוון שהעבודה לא תלויה במסלול, רק נקודות הקיצון חשובות: $\vec{r}_1, \vec{r}_2$

③ עבור מסלול סגור העבודה היא אפס

④ העבודה שנעשתה בין נקודות A ל-B היא ההפך של העבודה בין B ל-A.

כוח שמקיים את התכונות האלה נקרא כוח משמר.

גם כוח הקפיץ הוא כוח משמר: $W^{EL} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$

נגדיר עתה <u>אנרגיה פוטנציאלית</u> U

$$W_{grav} \equiv -\Delta U_{grav}$$
$$mg(y_1 - y_2) = -\Delta U_{grav}$$
$$\Delta U_{grav} = mgy_2 - mgy_1$$

לכן:

$$\boxed{U_{grav} = mgy}$$

$$W_{EL} \equiv -\Delta U_{EL}$$
$$\frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = -\Delta U_{EL}$$

$$\Delta U_{EL} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}$$

לכן:

$$\boxed{U_{EL} = \frac{kx^2}{2}}$$

ניזכר במשפט עבודה-אנרגיה: $W^{NET} = \Delta K$

נניח מצב שכוח המשקל הוא הכוח היחיד שעושה עבודה:

$$W_{grav} = \Delta K$$
$$-\Delta U_{grav} = \Delta K$$
$$-(U_2^{grav} - U_1^{grav}) = K_2 - K_1$$
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

הגדרה: אנרגיה מכנית $E = K + U^{grav}$

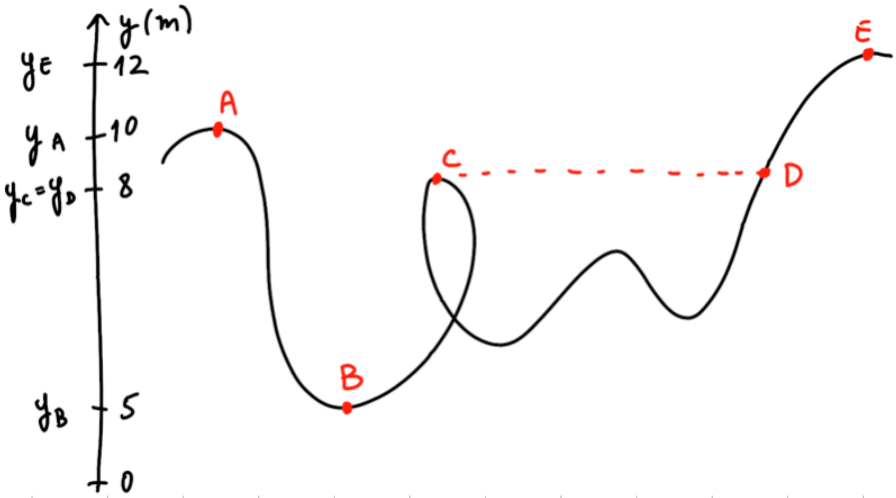
$\boxed{\text{עיקרון שימור אנרגיה}}$ $\boxed{E_1 = E_2}$

עשינו את זה עבור כוח המשקל, אבל אותו הדבר תקף גם עבור כוחות משמרים אחרים, כמו כוח הקפיץ, שנגדיר

$$E = K + U^{grav} + U^{EL} + ETC$$

תרגיל

רכבת הרים בעלת מסה 1000 kg נוסעת על מסילה חסרת חיכוך. מה המהירות שלה בכל אחת מהנקודות האלה, בהנחה ש-$v_a = 0$?



$$E = CONST$$

$$E_A = U_A^{grav} + \cancel{K_A}^{0}$$

:B

$$E_A = E_B \rightarrow U_A^{grav} = U_B^{grav} + K_B$$

$$K_B = U_A^{grav} - U_B^{grav} = mgy_A - mgy_B$$

$$\frac{\cancel{m} v_B^2}{2} = \cancel{m} g (y_A - y_B)$$

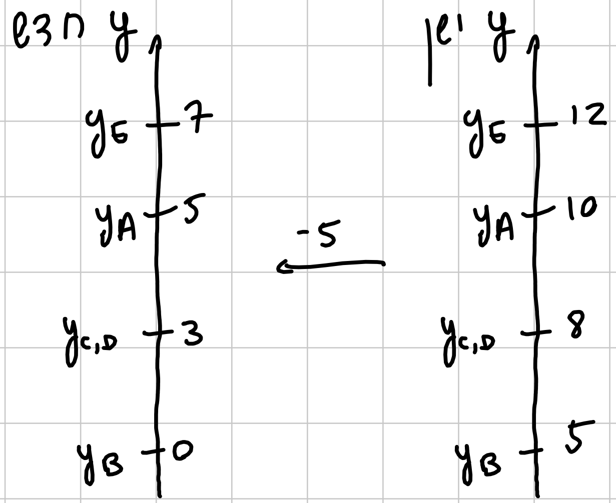
$$v_B = \sqrt{2g(y_A - y_B)} \rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot 9.8 (10 - 5)} \simeq 9.9 \, m/s$$

C,D : $y_C = y_D$ $\qquad v_D = v_C = \sqrt{2g(y_A - y_C)} \simeq 6.3\ m/s$

E : $v_E = \sqrt{2g(y_A - y_E)} = \sqrt{2 \cdot g(-2)}$

הרכבת לא תגיע!

מה היה קורה אילו היינו מגדירים מחדש את ציר ה-y, כך שנקודה B היא עכשיו ראשית הציר?



$$v_B = \sqrt{2g(y_A - y_B)}$$

$$y_A - y_B = 5m$$

לא משנה איפה ראשית הציר!!!

התוצאה לא תשתנה בכלל!

מה היה קורה אילו היה כוח חיכוך?

$$W^{NET} = \Delta K$$

עכשיו שני כוחות מסוגלים לעשות עבודה: כוח המשקל וכוח החיכוך:

$$W^{grav} + W^{FRIC} = \Delta K$$

$$-\Delta U^{grav} + W^{FRIC} = \Delta K$$

$$-(U_2^{grav} - U_1^{grav}) + W^{FRIC} = K_2 - K_1$$

$$K_1 + U_1^{grav} + W^{FRIC} = K_2 + U_2^{grav}$$

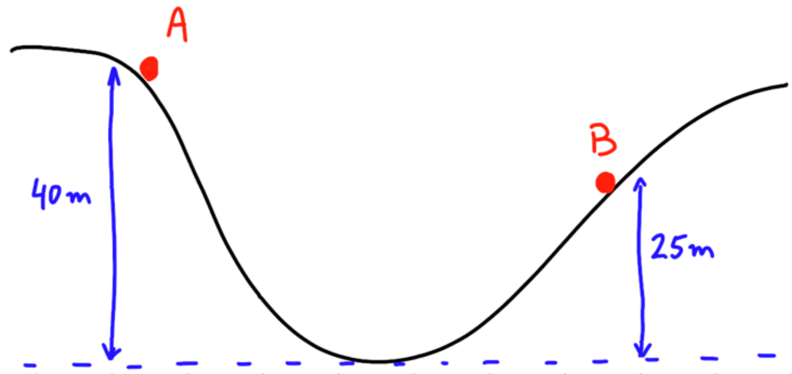
$$E_1 + W^{FRIC} = E_2$$

והאיזון כללי, עבור כוחות לא משמרים:

$$\boxed{E_1 + W^{NC} = E_2}$$

תרגיל

גוף בעל מסה 8 kg מחליק על משטח מחוספס. הוא מתחיל מנקודה A במנוחה, ובשהוא מגיע לנקודה B הוא גם במנוחה. מה הייתה העבודה של כוח החיכוך?



$$E_A + W^{NC} = E_B$$

$$(\cancel{K_A} + U_A^{grav}) + W^{NC} = \cancel{K_B} + U_B^{grav}$$

$$mgy_A + W^{NC} = mgy_B$$

$$W^{NC} = mg(y_B - y_A)$$

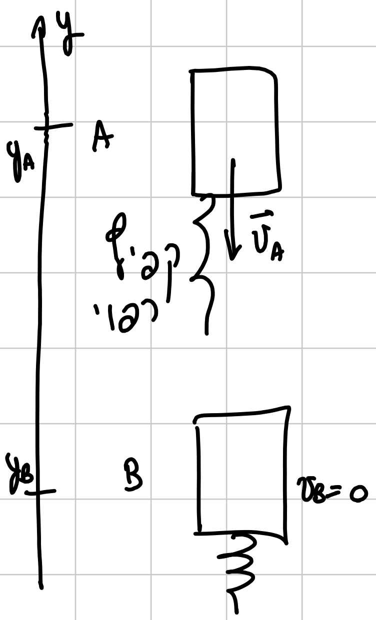
$$W^{NC} = -1176\,J$$

האם הגיוני שהעבודה של החיכוך תהיה שלילית?

מה זה אומר?

תרגיל

מעלית בעלת מסה 2000 kg נופלת אחרי שהכבל נקרע. כאשר מהירותה 4.0 m/s המעלית פוגעת בקפיץ בתחתית הבור. הקפיץ מיועד לעצור את המעלית, והוא מתכווץ בשיעור של 2.00 m בזמן העצירה. בנוסף, כוח קבוע של 17000 N פועל כלפי מעלה, כתוצאה מחיכוך בין מנגנון הבטיחות של המעלית ודפנות הבור. מצאו את קבוע הקפיץ k.



$y_A = 2.00\,m$

$y_B = 0\,m$

$v_A = 4.0\,m/s$

$v_B = 0\,m/s$

$F_K = 17000\,N$

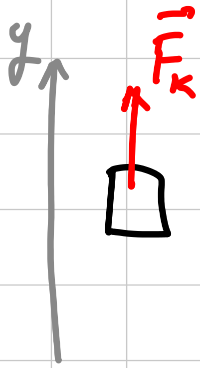
$\vec{\Delta y} = -2.00\,\hat{j}\,(m)$

$\vec{F}_K = 17000\,\hat{j}\,(m)$

$$E_A + W^{NC} = E_B$$

$$E_A = K_A + U_A^{grav} + \cancel{U_A^{el}}$$

$$= \frac{m v_A^2}{2} + mgy_A$$



$$E_B = \cancel{K_B} + U_B^{grav} + U_B^{EL} = mgy_B + \frac{k(\Delta y)^2}{2}$$

$$E_A + W^{NC} = E_B$$

$$\frac{mv_A^2}{2} + mgy_A - 34000 = mgy_B + \frac{k(\Delta y)^2}{2}$$

$$W^{NC} = \vec{F}\cdot\vec{\Delta y} = (17000\hat{j})\cdot(-2.00\hat{j}) = -34000\ J$$

עבודה של החיכוך

$$\frac{k}{2}(\Delta y)^2 = \frac{mv_A^2}{2} + mg(y_A - y_B) - 34000$$

$$k = \frac{2}{(\Delta y)^2}\left(\frac{mv_A^2}{2} + mg\underbrace{(y_A - y_B)}_{\Delta y} - 34000\right)$$

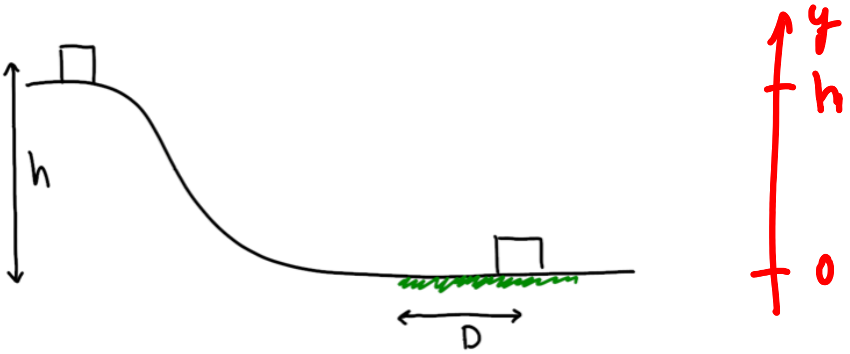
$$k = 1.06\cdot 10^4\ N/m$$

תרגיל

קופסה מחליקה במורד מדרון חסר חיכוך, עד שהיא נכנסת לאזור מחוספס אופקי, ראו ציור. הקופסה נעצרת במרחק D אחרי הכניסה לאזור המחוספס.

א. אם נקטין את הגובה ההתחלתי h, מרחק העצירה יגדל, יקטן, או לא ישתנה?

ב. אם נגדיל את המסה של הקופסה, מרחק העצירה יגדל, יקטן, או לא ישתנה?



$$E_1 + W^{NC} = E_2$$

$$E_1 = K_1 + U_1^{GRAV} = \cancel{K_1} + mgh$$

$$E_2 = K_2 + U_2^{GRAV} = 0 + 0 = 0$$

$$W^{NC} = |F_K|\cdot|D|\cdot\cos\theta$$

$$W^{NC} = -\mu_k N D$$

$$N = mg$$

$$E_1 + W^{NC} = E_2$$

$$mgh - \mu_k N D = 0 \rightarrow \mu_k \cancel{mg} D = \cancel{mg} h$$

$$D = \frac{h}{\mu_k}$$

א. יקטן

ב. לא ישתנה

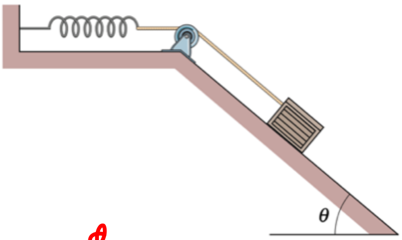
תרגיל

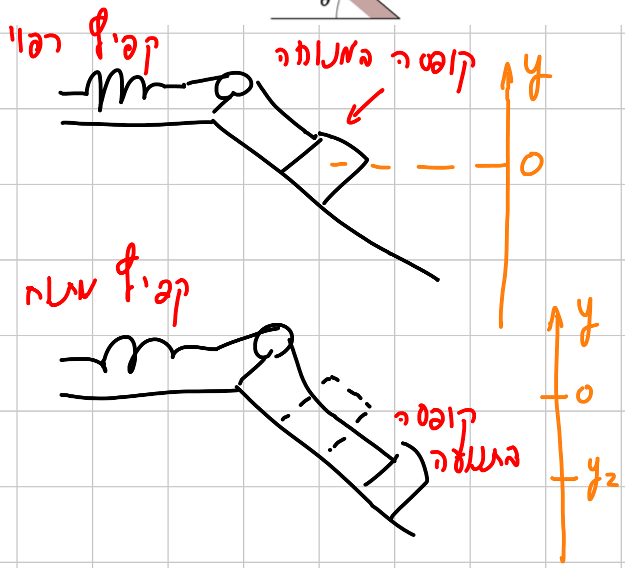
קופסה בעלת מסה 2.0 kg נמצאת על מישור משופע עם זווית 40 מעלות ביחס לאופק, ראו ציור. הקופסה מחוברת, באמצעות חוט אידאלי וגלגלת חסרת חיכוך לקפיץ בעל קבוע קפיץ k=120 N/m. הקופסה משוחררת כאשר הקפיץ רפוי.

א. מה מהירות הקופסה כאשר היא כבר זזה 10 cm במורד השיפוע?

ב. כמה רחוק במורד השיפוע הקופסה תוכל להחליק לפני שהיא תיעצר?

ג. מה הגודל והכיוון של תאוצת הקופסה כאשר היא נעצרת לרגע?





מצב ①

מצב ②

$m = 2.0\ kg$

$k = 120\ N/m$

$\theta = 40°$

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = \cancel{K} + \cancel{U^{EL}} + \cancel{U^{grav}} = 0$$

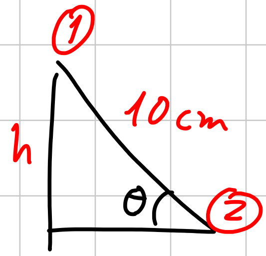
$$E_2 = K + U^{EL} + U^{grav}$$
$$= \frac{m v_2^2}{2} + \frac{k(\Delta x)^2}{2} + m g y_2$$

$$\frac{m v_2^2}{2} + \frac{k(\Delta x)^2}{2} + m g y_2 = 0$$

להכפיל ב- $\frac{2}{m}$

$$v_2^2 = -\frac{k}{m}(\Delta x)^2 - 2 g y_2$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{-\frac{k}{m}(\Delta x)^2 - 2 g y_2}} \rightarrow v_2 = 0.81\ m/s$$



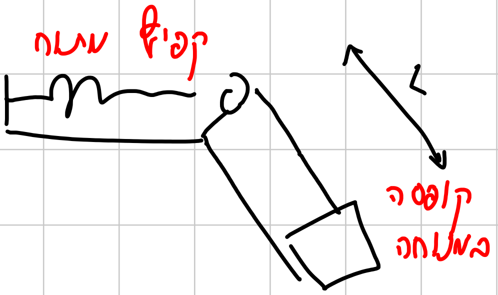
$\sin\theta = \frac{h}{0.1} \rightarrow h = 0.1 \sin\theta$

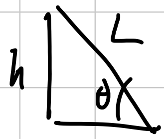
$y_2 = -h = -0.1 \sin\theta$

$\Delta x_{קפיץ} = 0.1 m$

ב

מצב ③





$$E_3 = \cancel{K} + U^{EL} + U^{grav}$$

$$E_3 = \frac{k(\Delta x)^2}{2} + mgy_3 = E_1 = 0$$

$h = L\sin\theta$

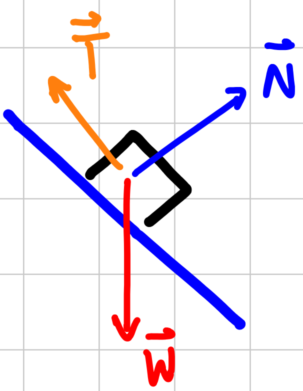
$y_3 = -h = -L\sin\theta$

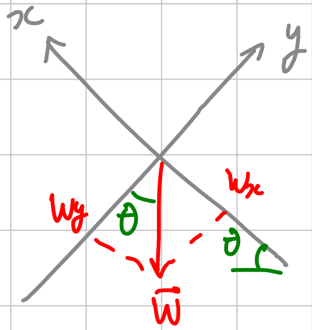
$\Delta x = L$

$$\frac{kL^{\cancel{2}}}{2} + mg(-\cancel{L}\sin\theta) = 0$$

$$\frac{kL}{2} = mg\sin\theta \rightarrow \boxed{L = \frac{2mg\sin\theta}{k}} \simeq 0.21\ m$$

ג





$\vec{W} = -W_x\hat{i} - W_y\hat{j}$

$W_x = W\sin\theta$

$W_y = W\cos\theta$

הכוחות בציר x:

$\vec{T} = T\hat{i}$

$\vec{W_x} = -W_x\hat{i} = -W\sin\theta\,\hat{i}$

גודל המתיחות שווה לגודל כוח הקפיץ: $T = k\Delta x$

חוק שני של ניוטון:

$\sum \vec{F_x} = m\vec{a}$

$\vec{T} + \vec{W_x} = m\vec{a}$

נניח שהתאוצה היא במעלה השיפוע: $\vec{a} = a\hat{i}$

$k\Delta x\cancel{\hat{i}} - W\sin\theta\cancel{\hat{i}} = ma\cancel{\hat{i}}$

$$\boxed{a = \frac{k\Delta x}{m} - g\sin\theta}$$

$a \cong 6.3\ m/s^2$

קיבלנו סימן חיובי, התאוצה היא אכן במעלה השיפוע!

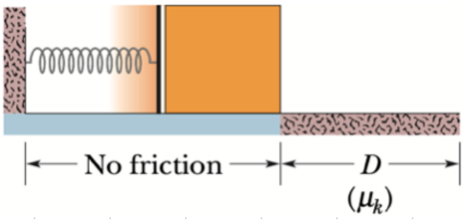
תרגיל

בציור למטה רואים קופסה בעלת מסה 3.5 kg שמואצת ממנוחה על ידי קפיץ בעל קבוע קפיץ 640 N/m. הקופסה מתנתקת מהקפיץ כאשר הוא רפוי, ואז נוסעת על פני מישור אופקי עם מקדם חיכוך קינטי 0.25. כוח החיכוך גורם לקופסה להיעצר במרחק $D = 7.8$ m.

א. בכמה גדלה אנרגיית החום של המערכת קופסה+רצפה?

ב. מה האנרגיה הקינטית המירבית שהייתה לקופסה?

ג. מה הביווץ ההתחלתי של הקפיץ?



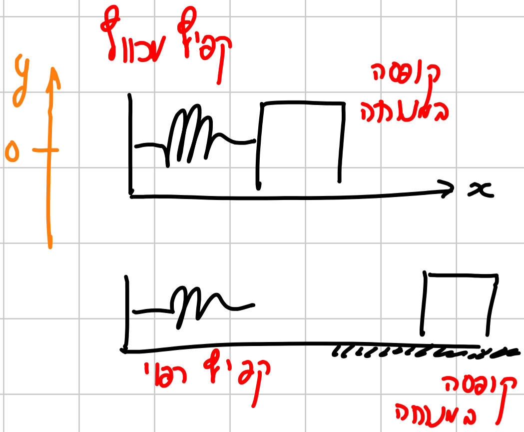
א

$m = 3.5\,kg$

$k = 640\,N/m$

$D = 7.8\,m$

$\mu_K = 0.25$



מצב 1

מצב 2

$$W^{NC} = \vec{F}_k \cdot \vec{\Delta x} = -F_k\hat{\imath} \cdot D\hat{\imath}$$

$$W^{NC} = -\mu_k m g D$$

$$W^{NC} = -66.8\,J$$

$\vec{\Delta x} = D\hat{\imath}$

$\vec{F}_k = -F_k\hat{\imath}$

$F_k = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot mg$

זו האנרגיה שכוח החיכוך לקח מהמערכת, כל זה הפך לחום:

תשובה $+66.8J$

ב

מרגע שהקופסה התנתקה מהקפיץ הייתה לה הכמות המרבית של אנרגיה קינטית. לאחר מכן כוח החיכוך רק עושה עבודה שלילית ולוקח אנרגיה מהמערכת, לכן המהירות קטנה. נקרא מצב 3 המצב שבו הקופסה מתנתקת מהקפיץ

$$E_3 = K_3 + \cancel{U^{el}} + \cancel{U^{grav}}$$

$$E_1 = \cancel{K_1} + U^{el} + \cancel{U^{grav}} = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$$

אנחנו לא יודעים את Δx...

נשווה בין שני מצבים אחרים: ① ו- ②

$$E_1 + W^{NC} = E_2$$

- $E_1 = \cancel{K_1} + U^{EL} + \cancel{U^{grav}} = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$

- $E_2 = \cancel{K_2} + \cancel{U^{EL}} + \cancel{U^{grav}} = 0$

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} - \mu_k m g D = 0$$

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = \mu_k m g D$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{2\mu_k m g D}{k}$$

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{2\mu_k m g D}{k}}} \simeq 0.46\,m$$

ג

נחזור לסעיף ב:

$$E_1 = E_3$$

הצבה

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = K_3$$

$$\boxed{K_3 = \mu_k m g D} \simeq 66.8\,J$$

תרגיל

שאלה 4 [30 נקודות]

ג'יין, בעלת מסה 50 kg, צריכה להציל את טרזן, הנמצא בגדה השנייה של נהר שרוחבו D. היא צריכה להתנדנד בעזרת חבל בעל אורך L, מזווית θ ביחס לאנך (ראו ציור). רוח נושבת בכיוון אופקי, וכך כוח קבוע $\vec{F}$ מופעל עליה כלפי ימין.

נתונים: $D = 50.0\text{ m}, F = 110\text{ N}, L = 40.0\text{ m}, \theta = 50.0°, \text{and } g = 9.8\text{ m/s}^2$.

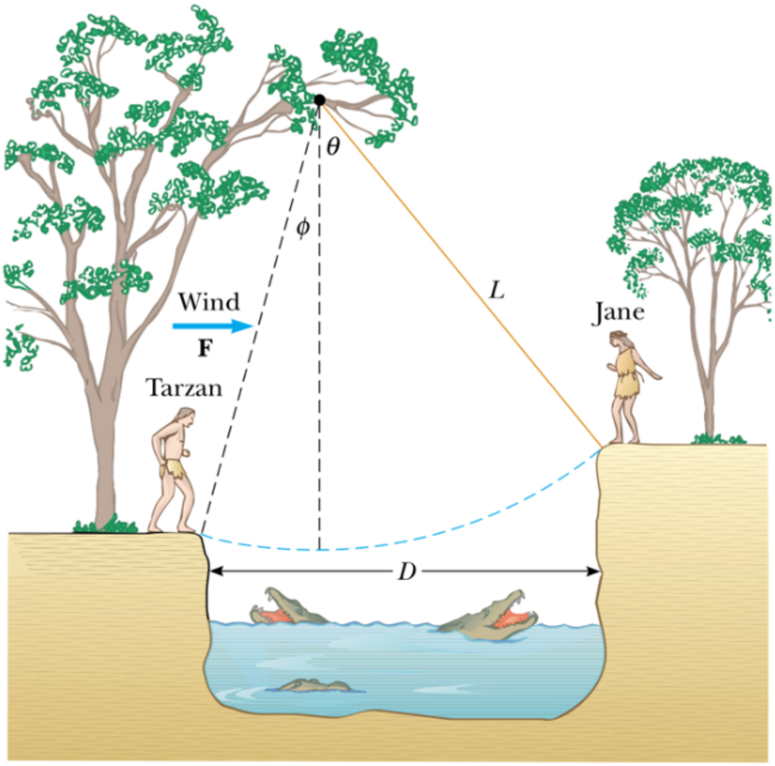
א. [4 נקודות] מצאו את הזווית ϕ. פתרו בצורה פרמטרית, ורק אז הציבו את הערכים.

ב. [4 נקודות] מהו הפרש הגבהים בין ג'יין לטרזן?

ג. [4 נקודות] מה העבודה שהרוח עושה על ג'יין כאשר היא מתנדנדת לכיוון של טרזן?

ד. [9 נקודות] מה צריכה להיות המהירות המינימלית של ג'יין ברגע שהיא יוצאת מהגדה הימנית כדי שהיא תצליח להגיע לגדה השמאלית?

ה. [9 נקודות] אחרי שג'יין מגיעה לטרזן, שניהם צריכים לחזור חזרה לגדה הימנית. מה צריכה להיות המהירות המינימלית שלהם כדי שהם יצליחו לעשות זאת ביחד? (טרזן בעל מסה 80 kg)



א

$m_J = 50\,kg$

$m_T = 80\,kg$

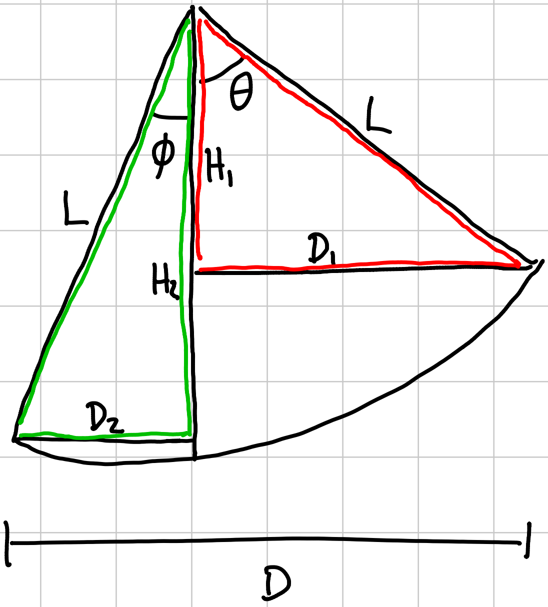
$D = 50.0\,m$

$F = 110\,N$

$L = 40.0\,m$

$\theta = 50.0°$

$g = 9.8\,m/s^2$



$D_1 + D_2 = D$

$\sin\theta = \frac{D_1}{L} \rightarrow D_1 = L\sin\theta$

$\sin\phi = \frac{D_2}{L} \rightarrow D_2 = L\sin\phi$

$$L\sin\theta + L\sin\phi = D$$

$$\sin\phi = \frac{D}{L} - \sin\theta$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{D}{L} - \sin\theta\right) = 28.9° = 0.51\,rad$$

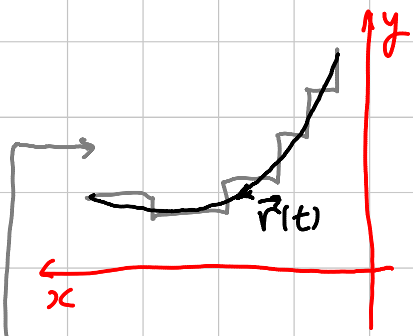
ב

$$h = H_2 - H_1$$

$$h = L\cos\phi - L\cos\theta$$

$$h = 9.29\,m$$

ג



המסלול של ג'יין עקום, ואפשר לבטא אותו ע"י

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

הכוח של הרוח הוא $\vec{F}_{רוח} = -F_{רוח}\hat{i}$

העבודה של הרוח היא המכפלה הסקלרית

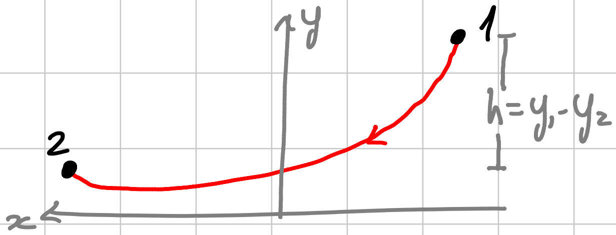
של כוח הרוח וההעתק של ג'יין. מכיוון שהרוח נושבת בכיוון האופקי בלבד, היא לא מסוגלת לעשות עבודה על העתק אנכי, וההעתק האופקי הכולל הוא $\vec{\Delta x} = D\hat{i}$, לכן $W = \vec{F}_{רוח} \cdot \vec{\Delta x} = (-F_{רוח}\hat{i})(D\hat{i})$

הרוח עושה עבודה שלילית על ג'יין: $W = -F_{רוח} \cdot D = -5500\,J < 0$

אפשר לקבל אותה התשובה אם חושבים שהמסלול העקום מורכב מאין-ספור מקטעים אופקיים ואנכיים, וקיימת עבודה רק במקטעים האופקיים, שסכום אורכם הוא D.

ד

התנאי הוא שג'ין תגיע לגבעה השנייה במהירות אפס.
נשתמש בשימור אנרגיה:



$$E_1 + W_{NC} = E_2$$

$$K_1 + U_1 + W_{\text{רוח}} = \cancel{K_2} + U_2 \qquad v_2 = 0$$

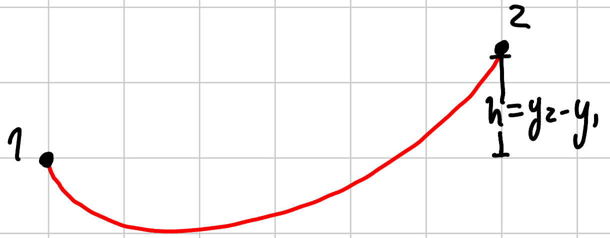
$$K_1 = \frac{mv^2}{2} = U_2 - U_1 - W_{\text{רוח}} = mgy_2 - mgy_1 - W_{\text{רוח}} = mg\underbrace{(y_2 - y_1)}_{-h} - W_{\text{רוח}}$$

$$\frac{mv^2}{2} = -mgh - W_{\text{רוח}} \longrightarrow v = \sqrt{2\left(-gh - \frac{W_{\text{רוח}}}{m}\right)}$$

$$v = 6.15 \ m/s$$

ה

עכשיו המסה תהיה $m = 50kg + 80kg$, ומכיוון שהרוח נושבת לאורך הכיוון של ההעתק האופקי, העבודה של הרוח הפעם תהיה חיובית $W_{\text{רוח}} = 5500J$, כי הרוח עוזרת להם להגיע לגבעה השנייה. שוב התנאי יהיה הגעה עם מהירות אפס.



$$E_1 + W_{NC} = E_2$$

$$K_1 + U_1 + W_{NC} = \cancel{K_2} + U_2 \qquad v_2 = 0$$

$$K_1 = \frac{mv^2}{2} = U_2 - U_1 - W_{NC}$$

המסה של שניהם

$$\frac{mv^2}{2} = mgy_2 - mgy_1 - W_{NC} = mg\overbrace{(y_2 - y_1)}^{h} - W_{NC} = mgh - W_{NC}$$

$$v = \sqrt{2\left(gh - \frac{W_{NC}}{m}\right)} = 9.87 \ m/s$$

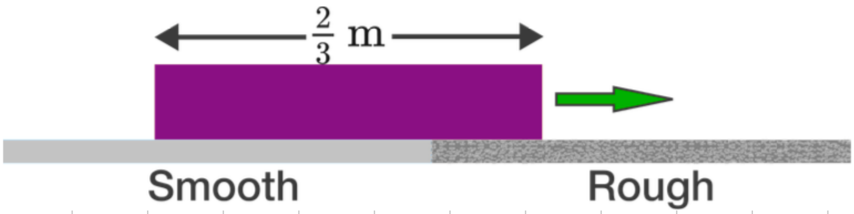
תרגיל

שאלה 2 [20 נקודות]

קופסה מלבנית באורך 2/3 m מחליקה על משטח חלק (חסר חיכוך) במהירות קבועה 2 m/s. הקופסה אז מחליקה אל תוך איזור מחוספס, והיא נעצרת בדיוק כאשר כל אורכה על האיזור המחוספס. נניח שהלחץ בתחתית הקופסה הוא אחיד.

א. [10 נקודות] ציירו גרף של עוצמת כוח החיכוך שפועל על הקופסה כתלות במיקומה. נקבע ציר x בכיוון ימין וראשית הציר בנקודה בין המשטח החלק והמחוספס. בגרף ציינו את מיקום הקופסה כמיקום הדופן הימנית שלה.

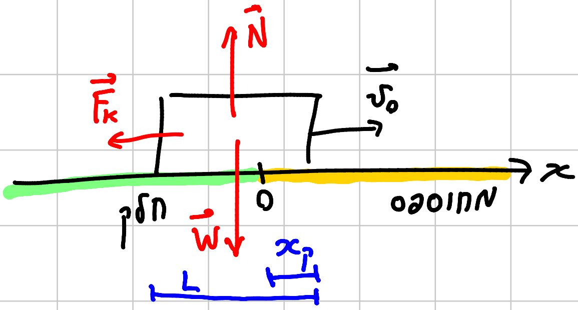
ב. [10 נקודות] מהו ערכו של מקדם החיכוך הקינטי μ_k בין הקופסה למשטח המחוספס?



א

$L = \frac{2}{3}m$

$v_0 = 2\,m/s$



כוח החיכוך שפועל על הקופסה תלוי בכוח הנורמל של החלק היחסי של הקופסה שנמצא על האיזור המחוספס, הרי הנורמל על החלק החלק לא יתרום כלום לכוח החיכוך.

מכיוון שהקופסה היא מלבנית והצפיפות שלה אחידה (הלחץ בתחתית אחיד), הנורמל יהיה מתכונתי לחלק שנמצא על השטח המחוספס.

מיקום הקופסה

$$N = mg \longrightarrow N_{מחוספס} = N \cdot \frac{x_ק}{L} = \frac{mg}{L} x_ק$$

$$F_k = \mu_k \cdot N_{מחוספס} = \frac{\mu_k m g}{L} \cdot x_ק$$

6m ~

ניתן למצוא את μ_k אחרי שפותרים את סעיף ב'.

ב

נשתמש בשימור אנרגיה: $E_1 + W_{nc} = E_2$

$$E_1 = K_1 = \frac{m v_0^2}{2}$$

$$E_2 = 0$$

$$W_{nc} = -\left(\text{השטח מתחת לגרף}\right) = -\frac{1}{2} L \mu_k m g$$

העבודה שלילית: כוח חיכוך כלפי שמאל והעתק כלפי ימין.

$$\frac{\cancel{m} v_0^2}{\cancel{2}} - \frac{L \mu_k \cancel{m} g}{\cancel{2}} = 0$$

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{Lg} = 0.61$$