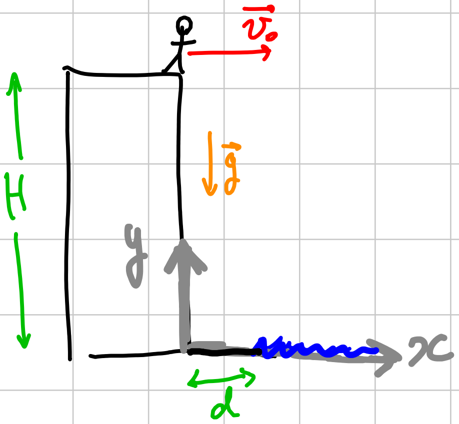
תרגיל

אדם קופץ מבניין בעל גובה 30 m הנמצא מול הים. המרחק בין בסיס הבניין לים היא 4 m. מה צריכה להיות המהירות האופקית המינימלית של אותו האדם כך שהוא ייפול במים ולא בקרקע?



$\vec{r}_0 = (0, H) = 0\hat{i} + H\hat{j}$

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, 0) = v_{0x}\hat{i} + 0\hat{j}$

$\vec{a} = (0, -g) = 0\hat{i} - g\hat{j}$

$H = 30m$

$d = 4m$

$\vec{g} = -g\hat{j}$

וקטור תאוצת הכובד שווה לגודל $g = 9.8 m/s^2$ בכיוון כלפי מטה

$g = 9.8\, m/s^2$

$\vec{g} = -g\hat{j} = -9.8\hat{j}\; m/s^2$

מדובר בתנועה מואצת, לכן נשתמש בנוסחה:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

נקרא T זמן ההגעה של האדם לגובה אפס, ונקרא $\vec{B} = (d, 0) = d\hat{i} + 0\hat{j}$ את הנקודה שבה הים. אם האדם יגיע בדיוק בנקודה $\vec{B}$, נקבל:

$$\vec{r}(T) = \vec{B} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 T + \frac{\vec{a}T^2}{2}$$

$$d\hat{i} + 0\hat{j} = 0\hat{i} + H\hat{j} + (v_{0x}\hat{i} + 0\hat{j})T - \frac{g\hat{j}T^2}{2}$$

→ איברים עם $\hat{j}$

→ איברים עם $\hat{i}$

2 משוואות עם 2 נעלמים:

$T = ?$

$v_{0x} = ?$

ציר x: (1) $d = v_{0x} \cdot T$

ציר y: (2) $0 = H - \frac{gT^2}{2}$

(2): $\frac{gT^2}{2} = H \longrightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

(1): $v_{0x} = \frac{d}{T} = d\sqrt{\frac{g}{2H}}$

המהירות האופקית צריכה להיות גדולה מה $v_{0x} = d\sqrt{\frac{g}{2H}}$

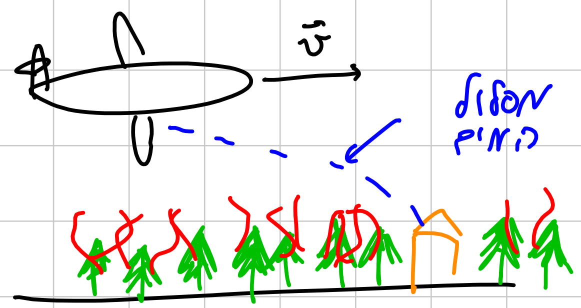
$v_{0x} \simeq 1.6\, m/s$ שווה בערך

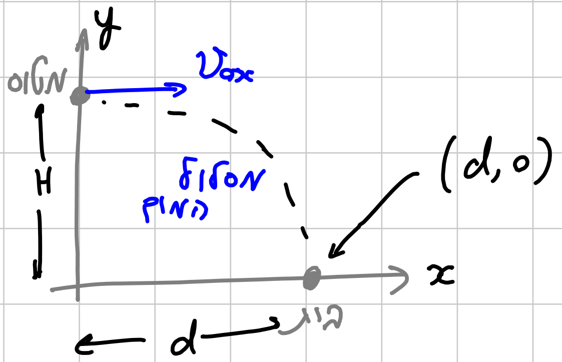
תרגיל

מטוס כיבוי טס בגובה 100 m ובמהירות 180 km/h מעל יער בוער.

א. באיזה מרחק אופקי מבית בוער המטוס צריך לשחרר את המים שבתוכו כדי להציל את הבית?

ב. מהו וקטור המהירות של המים כאשר הם פוגעים בבית?





א התרגיל הזה דומה מאוד לתרגיל הקודם. קיבלנו אז כי

$$v_{0x} = d\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

נחלץ עכשיו את d:

$$\boxed{d = v_{0x}\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad d \simeq 226\,m}$$

ב

$$\vec{v}_0 = (v_{0x},0) = v_{0x}\hat{i}$$

$$\vec{a} = (0,-g) = -g\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{v}(t) = v_{0x}\hat{i} - gt\hat{j}$$

המים יגיעו לבית בזמן T:

$$\vec{r}(T) = (d,0) = d\hat{i}$$

$$\vec{r}_0 + \vec{v}_0 T + \frac{\vec{a}T^2}{2} = d\hat{i}$$

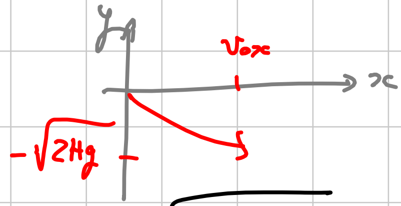
$$H\hat{j} + v_{0x}T\hat{i} - \frac{gT^2}{2}\hat{j} = d\hat{i}$$

ציר x: $v_{0x}T = d$

ציר y: $H - \frac{gT^2}{2} = 0$

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\vec{v}(T) = v_{0x}\hat{i} - gT\hat{j} = v_{0x}\hat{i} - \sqrt{2Hg}\,\hat{j}$$



$$v(T) = |\vec{v}(T)| = \sqrt{v_{0x}^2 + 2Hg} \simeq 67\,m/s$$

גודל מהירות (SPEED)

קיימת דרך אחרת לקבל את גודל המהירות בעת פגיעת המים בקרקע. ניזכר במשוואה

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

הגרסה הדו-מימדית שלה היא

$$v_f^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$$

כאשר $\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ היא המכפלה הסקלרית של $\vec{a}, \Delta\vec{r}$.

מכפלה סקלרית

כללי המחקק:
$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = 1$
$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = 0$

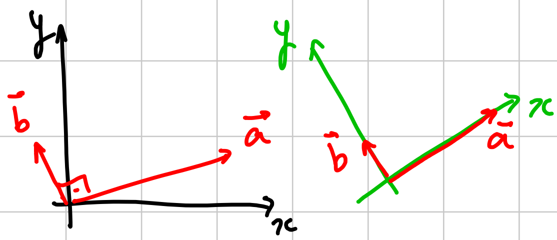
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) = a_xb_x\,\hat{i}\hat{i} + a_xb_y\,\hat{i}\hat{j} + a_yb_x\,\hat{j}\hat{i} + a_yb_y\,\hat{j}\hat{j}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$$

קוראים לה מכפלה סקלרית כי התוצאה היא סקלר (לא וקטור)

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x\cdot a_x + a_ya_y = a_x^2 + a_y^2 \;;\; |\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{a_x^2+a_y^2}\right)^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$$



$$\vec{a}\perp\vec{b} \;;\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\hat{i}\cdot b_y\hat{j} = a_xb_y\,\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

לפי הנתונים של הבעיה:

$$\vec{a} = (0,-g) = 0\hat{i} - g\hat{j}$$
$$\Delta\vec{r} = (d,-H) = d\hat{i} - H\hat{j}$$
$$\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} = 0\hat{i} + (-g)(-H) = gH$$

לכן

$$v_f^2 = v_0^2 + 2gH \longrightarrow v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

תרגיל

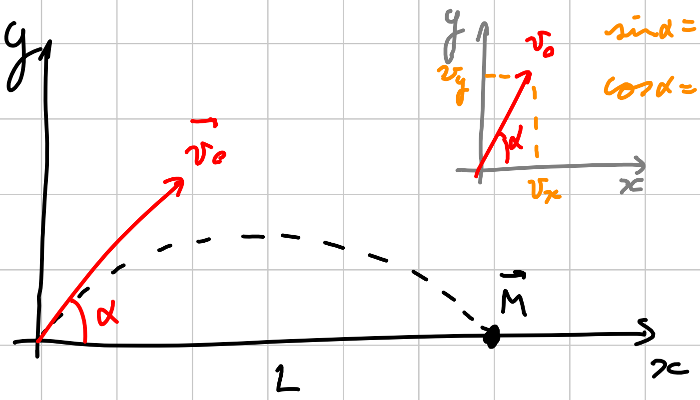
כדור נורה מרובה במהירות 900 m/s בכוונה לפגוע במטרה הנמצאת במרחק 200 m ובאותו הגובה של הרובה.

א. מה צריכה להיות הזווית של הרובה ביחס לקו האופק כך שהכדור יפגע בול במטרה?

ב. נגיד שעכשיו אנחנו רוצים שהכדור יגיע כמה שיותר רחוק מהרובה.

איזו זווית α ביחס לאופק הייתה נותנת לנו טווח פגיעה מירבי?

ג. מה הצורת המסלול של הכדור?



$\sin\alpha = \frac{v_y}{v_0}$

$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_0}$.

$v_0 = 900\ m/s$

$L = 200\ m$

$\vec{r}_0 = \vec{0}$

$\vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\hat{i} + v_0\sin\alpha\,\hat{j}$

$\vec{a} = -g\hat{j}$

$\vec{M} = L\hat{i} + 0\hat{j}$

$\alpha = ?$

א

מדובר בתנועה מואצת, לכן נשתמש בנוסחה:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

נקרא T את זמן הפגיעה:

$$\vec{r}(t) = v_0\cos\alpha\, t\,\hat{i} + v_0\sin\alpha\, t\,\hat{j} - \frac{gt^2}{2}\hat{j}$$

$$\vec{r}(T) = \vec{M} = L\hat{i}$$

$$v_0\cos\alpha\, T\,\hat{i} + v_0\sin\alpha\, T\,\hat{j} - \frac{gT^2}{2}\hat{j} = L\hat{i}$$

ציר x:

$$(1)\quad v_0\cos\alpha\, T = L$$

ציר y:

$$(2)\quad v_0\sin\alpha\, T - \frac{gT^2}{2} = 0$$

$$T = \frac{L}{v_0\cos\alpha}$$

הצבה

$$T\left(v_0\sin\alpha - \frac{gT}{2}\right) = 0$$

מתי בגובה אפס?

$$T = 0$$

$$v_0\sin\alpha - \frac{gT}{2} = 0 \rightarrow v_0\sin\alpha - \frac{g}{2}\frac{L}{v_0\cos\alpha} = 0$$

$$v_0\sin\alpha = \frac{gL}{2v_0\cos\alpha} \rightarrow 2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha = gL \rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{gL}{v_0^2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\alpha=\beta:\quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{gL}{v_0^2} \longrightarrow 2\alpha = \arcsin\left(\frac{gL}{v_0^2}\right) \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gL}{v_0^2}\right) \simeq 1.2\cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

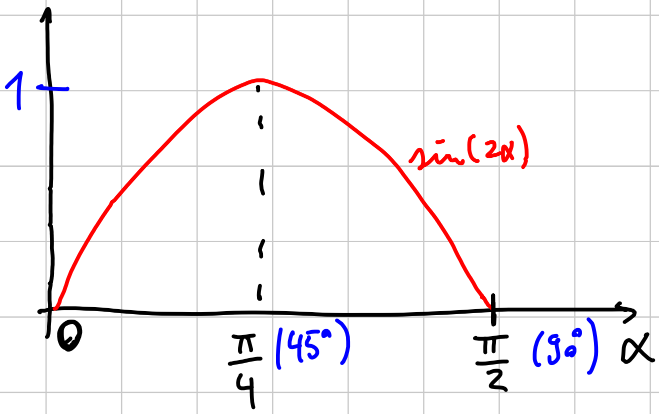
M16	$v_0 = 900\ m/s \longrightarrow$	$\alpha = 1.2\cdot 10^{-3} = 0.07^\circ$
.38	$v_0 = 212\ m/s \longrightarrow$	$\alpha = 2\cdot 10^{-2} = 1.1^\circ$
SERENA WILLIAMS SERVE	$v_0 = 47\ m/s \longrightarrow$	$\alpha = 0.36 = 21^\circ$

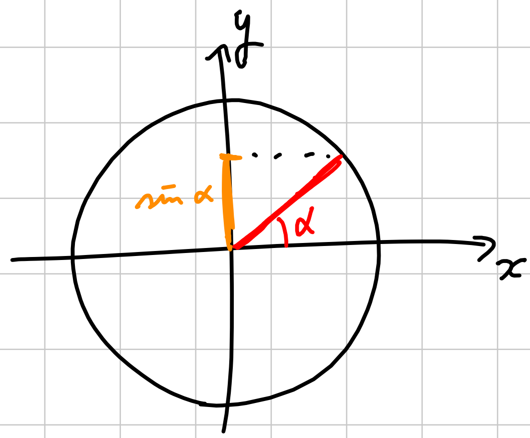
ב

טווח פגיעה

לפי הנוסחה שמצאנו למעלה :

$$\sin(2\alpha) = \frac{gL}{v_0^2} \longrightarrow L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

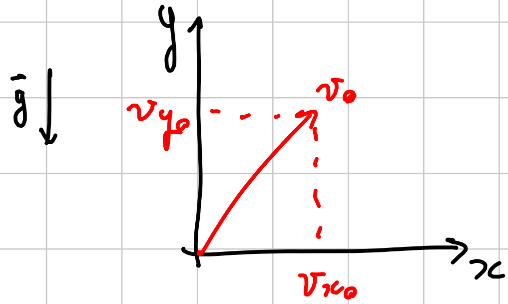




α	2α	$\sin(2\alpha)$
0	0	0
$\pi/4$	$\pi/2$	1
$\pi/2$	π	0

לכל טווח פגיעה
קיימות 2 זוויות

ג מה הצורה של מסלול של חפץ בזריקה בליסטית?



$$\vec{r}_0 = \vec{0}$$
$$\vec{v}_0 = v_{x_0}\hat{i} + v_{y_0}\hat{j}$$
$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{r}(t) = v_{x_0}t\hat{i} + v_{y_0}t\hat{j} - \frac{gt^2}{2}\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = (v_{x_0}t)\hat{i} + \left(v_{y_0}t - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{i} + r_y(t)\hat{j}$$
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

שני דרכים לכתוב את אותו הדבר

רכיב אופקי

רכיב אנכי

$$x(t) = v_{x_0}t \xrightarrow{\text{לפתור עבור } t} t = \frac{x}{v_{x_0}}$$

$$y(t) = v_{y_0}t - \frac{gt^2}{2}$$

הצבה

$$y = v_{y_0}\frac{x}{v_{x_0}} - \frac{gx^2}{2v_{x_0}^2}$$

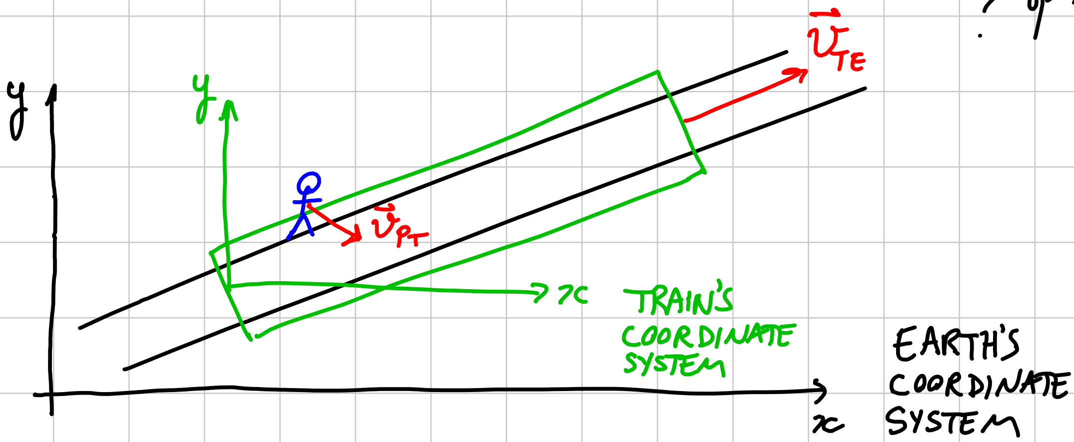
פולינום מסדר 2 ב-x!

פרבולה!

$$y = ax + bx^2$$

חיבור מהירויות

אדם נע בתוך רכבת הנוסעת במהירות קבועה ביחס לקרקע. איך נוכל לתאר את התנועה של אותו האדם מנקודת מבט של מישהו שעומד בתוך הרכבת ושל מישהו שעומד בקרקע?

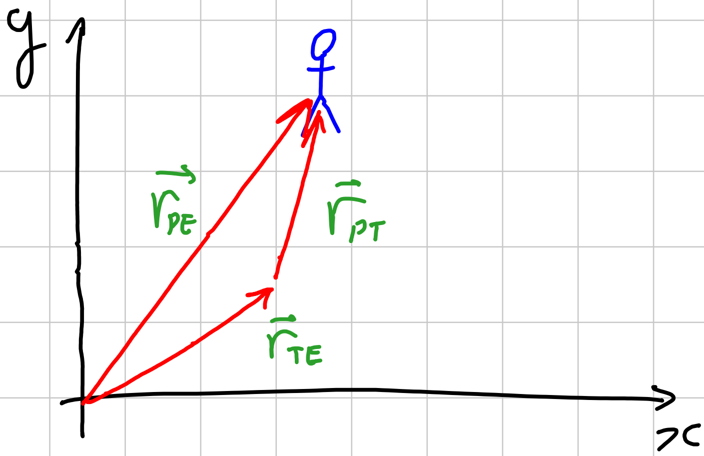


מבט על

$$\boxed{\text{מיקום גוף } A \text{ כפי שנמדד על-ידי } B \equiv \vec{r}_{AB}}$$

$$\vec{r}_{PE} = \vec{r}_{PT} + \vec{r}_{TE}$$

$\frac{d}{dt}$ ↓ קצב השינוי



$$\frac{d\vec{r}_{PE}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{PT} + \frac{d}{dt}\vec{r}_{TE}$$

$$\boxed{\vec{v}_{PE} = \vec{v}_{PT} + \vec{v}_{TE}}$$

מהירות האדם P כפי שנמדדת ביחס לקרקע E שווה למהירות של האדם P כפי שנמדדת ביחס לרכבת T ועוד המהירות של הרכבת T כפי שנמדדת ביחס לקרקע E.

תנאי חשוב שתי מערכות הצירים צריכות להסקים לגבי המיקום של כל וקטור כאשר הראשית של אחת יושב בדיוק על הראשית של השנייה.

זאת אומרת: כאשר $\vec{r}_{TE}=0$, מתקיים $\vec{r}_{PE}=\vec{r}_{PT}$

מה לגבי התאוצה?

$$\vec{v}_{PE} = \vec{v}_{PT} + \vec{v}_{TE}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{PE} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{PT} + \frac{d}{dt}\underbrace{\vec{v}_{TE}}_{\text{קבוע}}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{TE} = 0$$

מהירות הרכבת קבועה!

$$\vec{a}_{PE} = \vec{a}_{PT}$$

התאוצה של האדם כפי שנמדדת ביחס לרכבת שווה לתאוצה של האדם כפי שנמדדת ביחס לקרקע. יותר מאוחר נראה שבזה אומר שהכוחות על האדם הם זהים, בתנאי שהמהירות בין שתי המערכות היא קבועה.

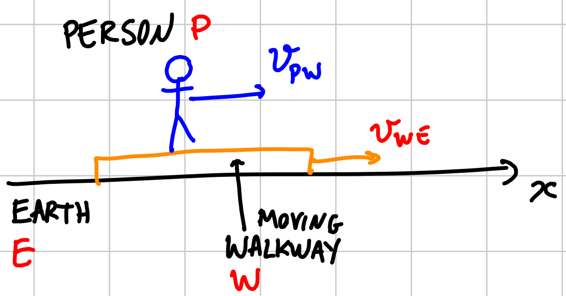
התוצאה שהתאוצה היא זהה נקראת "עקרון היחסות של גלילאו", המילה יחסות מתייחסת למהירות הקבועה של מערכת אחת ביחס למערכת אחרת.

תרגיל

אדם הנמצא בשדה תעופה הולך על מסוע שנע במהירות קבועה של 1 m/s ביחס לקרקע. בהינתן שהאדם מסוגל ללכת במהירות 2 m/s ביחס לרצפה, מה תהיה מהיאות האדם ביחס לקרקע אם הוא הולך:

א. עם ביוון התנועה של המסוע.

ב. נדג ביוון התנועה של המסוע.



בעייה חד מימדית

$$v_{WE} = 1\,m/s$$

א. $v_{PW} = 2\,m/s$

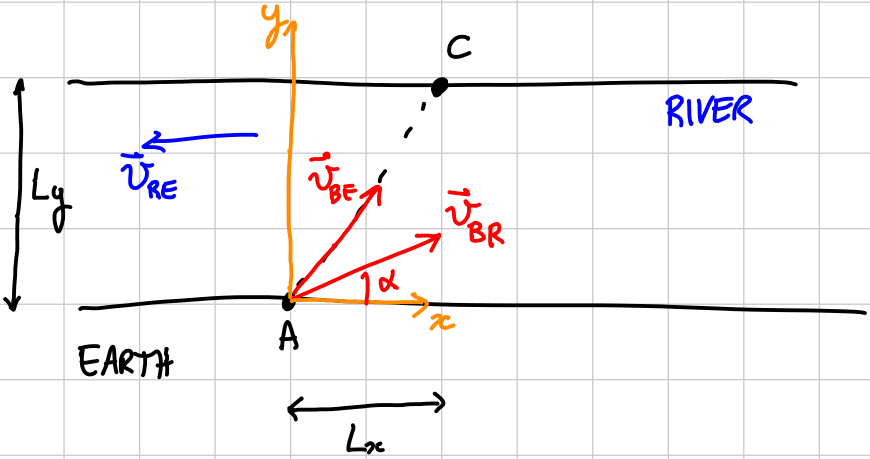
$$v_{PE} = v_{PW} + v_{WE} = 2 + 1 = 3\,m/s$$

ב. $v_{PW} = -2\,m/s$

$$v_{PE} = v_{PW} + v_{WE} = -2 + 1 = -1\,m/s$$

תרגיל

סירה שטה בנהר מנמל A לנמל C, הנמצא במרחק 20 m במעלה הזרם, בגדה הנגדית שמרחקה מהגדה הראשונה הוא 100 m. הסירה נוסעת במעלה הזרם ובזווית $\frac{\pi}{4}$ ביחס לנהר, וגודל מהירותה ביחס למים הוא 7 m/s. הנהר זורם במהירות קבועה לא ידועה. מהו ערך מהירות זאת?



B = BOAT
R = RIVER
E = EARTH

$\alpha = \pi/4 = 45°$

$L_x = 20\,m$

$L_y = 100\,m$

$\vec{r}_A = \vec{0}$

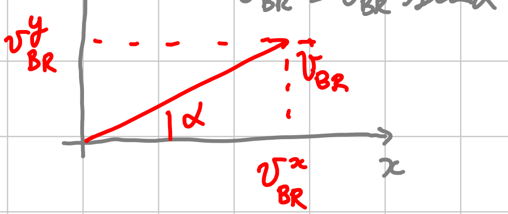
$\vec{r}_C = L_x\hat{\imath} + L_y\hat{\jmath}$

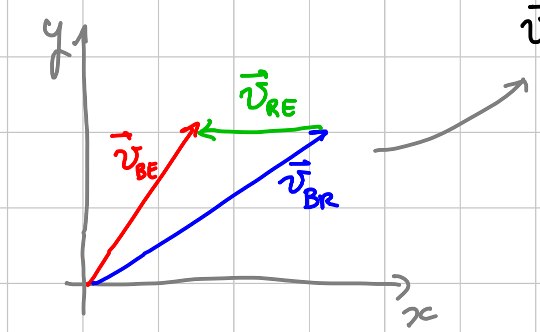
$\vec{v}_{RE} = -v_{RE}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$

$\vec{v}_{BR} = v_{BR}\cos\alpha\,\hat{\imath} + v_{BR}\sin\alpha\,\hat{\jmath}$

$v^x_{BR} = v_{BR}\cos\alpha$

$v^y_{BR} = v_{BR}\sin\alpha$





$\vec{v}_{BE} = \vec{v}_{BR} + \vec{v}_{RE} = (v_{BR}\cos\alpha - v_{RE})\hat{\imath} + v_{BR}\sin\alpha\,\hat{\jmath}$

$\underline{\underline{v_{RE} = ?}}$

מדובר בתנועה במהירות קבועה: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$

נקרא t_c את זמן ההגעה של הסירה לנקודה C

$\vec{r}(t_c) = \vec{r}_c$

במקרה שלנו: $\vec{r}_0 = \vec{r}_A = \vec{0}$

$\vec{v} = \vec{v}_{BE}$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{v}_{BE} \cdot t_C$$

$$L_x \hat{i} + L_y \hat{j} = \left(v_{BR} \cos\alpha - v_{RE}\right) t_C \hat{i} + v_{BR} \sin\alpha \, t_C \hat{j}$$

ציר x: (1) $L_x = \left(v_{BR} \cos\alpha - v_{RE}\right) t_C$

ציר y: (2) $L_y = v_{BR} \sin\alpha \, t_C$

קיבלנו 2 משוואות עם 2 נעלמים: v_{RE}, t_C

נפתור (2) עבור t_C ונציב ב-(1):

$$t_C = \frac{L_y}{v_{BR} \sin\alpha}$$

$$\left(v_{BR} \cos\alpha - v_{RE}\right) \frac{L_y}{v_{BR} \sin\alpha} = L_x$$

$$v_{BR} \cos\alpha - v_{RE} = \frac{L_x}{L_y} v_{BR} \sin\alpha$$

$$v_{RE} = v_{BR} \cos\alpha - \frac{L_x}{L_y} v_{BR} \sin\alpha$$

$$\boxed{v_{RE} = v_{BR}\left(\cos\alpha - \frac{L_x}{L_y} \sin\alpha\right) \longrightarrow v_{RE} \simeq 4\, m/s}$$

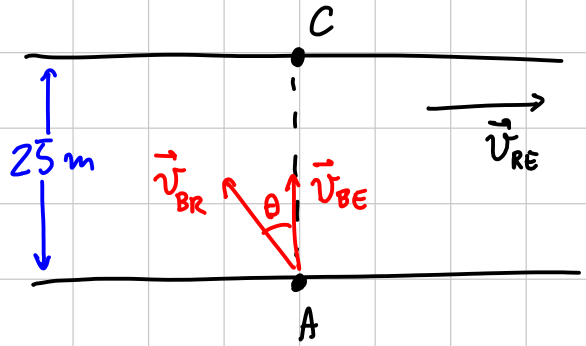
תרגיל

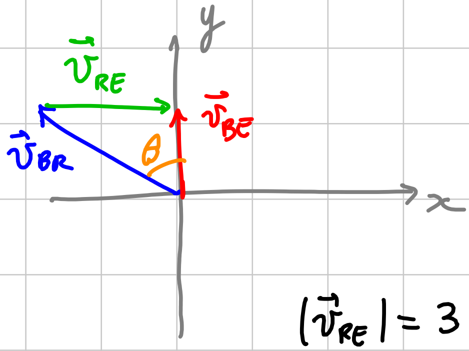
סירה חוצה נהר בעל רוחב 25 m מנקודה A לנקודה C הנמצאת בדיוק מולה. מה צריכה להיות הזווית של הסירה ביחס לקו המחבר בין A ל-C, בהינתן שמהירות הנהר היא 3 m/s ושהסירה שטה במהירות 9 m/s ביחס למים? מה הזווית הזאת אם הנהר הוא בעל רוחב 40 m?

B = BOAT

R = RIVER

E = EARTH

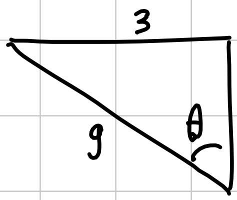




$|\vec{v}_{RE}| = 3\ m/s$

$|\vec{v}_{BR}| = 9\ m/s$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ \theta &= \underset{\text{rad}}{0.34} = \underset{\text{deg}}{19^\circ} \end{aligned}}$$



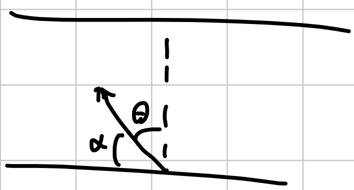
התשובה הזאת לא תלויה ברוחב הנהר

היינו יכולים להשתמש בביטוי של התרגיל הקודם:

$$v_{RE} = v_{BR}\left(\cos\alpha - \frac{L_x}{L_y}\sin\alpha\right)$$

כאשר $L_x = 0$

ו- $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$



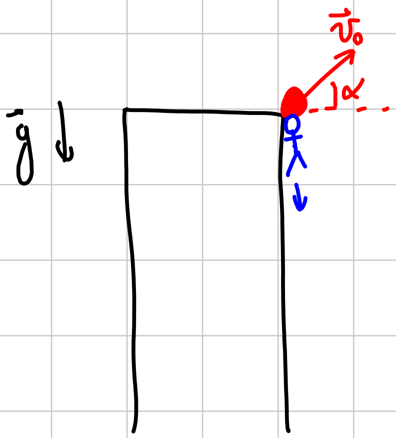
$$v_{RE} = v_{BR}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{v_{RE}}{v_{BR}}$$

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = \frac{v_{RE}}{v_{BR}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{1}{3}}$$

אדם נמצא בגג של בניין בגובה H. הוא בועט
בכדור בזווית α מעל האופק ובמהירות התחלתית v_0.
מאותו הרגע שהוא בועט בכדור, האדם קופץ מגג הבניין,
כאשר המהירות ההתחלתית שלו היא אפס. מבחינתו של האדם
הזה, איזה צורה במרחב עושה הכדור?



$$\vec{r}_{0B}=\vec{0} \qquad \vec{r}_{0P}=\vec{0}$$

$$\vec{v}_{0B}=v_{0Bx}\hat{i}+v_{0By}\hat{j} \qquad \vec{v}_{0P}=\vec{0}$$

$$\vec{a}_B=-g\hat{j} \qquad \vec{a}_P=-g\hat{j}$$

B=BALL
P=PERSON

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{r}_B(t)=\vec{v}_{0B}t-\frac{gt^2}{2}\hat{j} \qquad \vec{r}_P(t)=-\frac{gt^2}{2}\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r}_{BP}=\vec{r}_B-\vec{r}_P=\vec{v}_{0B}t\cancel{-\frac{gt^2}{2}\hat{j}}-\left(\cancel{-\frac{gt^2}{2}\hat{j}}\right)$$

$$\Delta\vec{r}_{BP}=\vec{v}_{0B}t=v_{0Bx}t\,\hat{i}+v_{0By}t\,\hat{j}$$

קו ישר!!