שאלה 1 [15 נקודות]

ביקום מקביל לזה שלנו, המכניקה פותחה לראשונה על-ידי יצחק נתן, שחי בארץ ישראל בשנת 600 לפנה"ס. באותו הזמן, היחידות הבסיסיות היו שונות מאלה של S.I.: יחידת האורך הבסיסית הייתה "אמה", והיא שווה 52 cm; יחידת המסה הבסיסית הייתה "שקל", והיא שווה 14 g; ויחידת הזמן הבסיסית הייתה "חלק", כאשר יש 24 שעות ביממה, ו-1080 "חלקים" בשעה.

א. [5 נקודות] כמה שווה תאוצת הכובד g במערכת היחידות שיצחק נתן היה רגיל לה?

ב. [5 נקודות] כמה שווה הלחץ האטמוספירי P_{atm} במערכת היחידות שיצחק נתן היה רגיל לה?

ג. [5 נקודות] כמה שווה הספק של 30 W במערכת היחידות שיצחק נתן היה רגיל לה?

נתונים: $g = 9.8\ \text{m/s}^2$, $P_{\text{atm}} = 1.01 \times 10^5\ \text{Pa}$, 1 W= 1 J/s.

1

$$1\ \text{אמה} = 0.52\,m$$
$$1\ \text{שקל} = 14\,g = 14\cdot 10^{-3}\,kg$$
$$1\ \text{חלק} = \frac{1\,h}{1080} = \frac{3600}{1080}\,s = \frac{10}{3}\,s$$

א

$$g = 9.8\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}\left(\frac{1\ \text{אמה}}{0.52\,\cancel{m}}\right)\left(\frac{\frac{10}{3}\,\cancel{s}}{1\ \text{חלק}}\right)^2 = \frac{9.8\cdot 10^2}{0.52\cdot 3^2}\ \frac{\text{אמה}}{\text{חלק}^2} = 209\ \frac{\text{אמה}}{\text{חלק}^2}$$

ב

$$P(Pa) = \frac{F(N)}{A(m^2)} = \frac{m(kg)\,a(m/s^2)}{A(m^2)} = \frac{ma}{A}\left(\frac{kg}{m\ s^2}\right)$$

$$P_{ATM} = 1.01\cdot 10^5\,Pa = 1.01\cdot 10^5\,\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}\cdot \cancel{s^2}}\left(\frac{1\ \text{שקל}}{14\cdot 10^{-3}\,\cancel{kg}}\right)\left(\frac{0.52\,\cancel{m}}{1\ \text{אמה}}\right)\left(\frac{\frac{10}{3}\,\cancel{s}}{1\ \text{חלק}}\right)^2$$

$$P_{ATM} = \frac{1.01\cdot 10^5\cdot 0.52\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2}{14\cdot 10^{-3}}\ \frac{\text{שקל}}{\text{אמה}\cdot\text{חלק}^2} = 4.17\cdot 10^7\ \frac{\text{שקל}}{\text{אמה}\cdot\text{חלק}^2}$$

ג

$$U_G(J) = m(kg)\,g(m\,s^{-2})\,y(m) \longrightarrow J = \frac{kg\ m^2}{s^2}$$

$$30\,W = 30\,\frac{J}{s} = 30\,\frac{\cancel{kg}\ \cancel{m^2}}{\cancel{s^3}}\left(\frac{1\ \text{שקל}}{14\cdot 10^{-3}\,\cancel{kg}}\right)\left(\frac{\frac{10}{3}\,\cancel{s}}{1\ \text{חלק}}\right)^3\left(\frac{1\ \text{אמה}}{0.52\,\cancel{m}}\right)^2$$

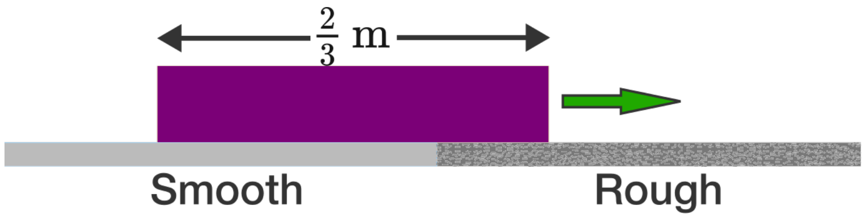
$$30\,W = \frac{30\left(\frac{10}{3}\right)^3}{14\cdot 10^{-3}\cdot 0.52^2}\ \frac{\text{שקל}\cdot\text{אמה}^2}{\text{חלק}^3} = 2.94\cdot 10^5\ \frac{\text{שקל}\cdot\text{אמה}^2}{\text{חלק}^3}$$

שאלה 2 [20 נקודות]

קופסה מלבנית באורך 2/3 m מחליקה על משטח חלק (חסר חיכוך) במהירות קבועה 2 m/s. הקופסה אז מחליקה אל תוך איזור מחוספס, והיא נעצרת בדיוק כאשר כל אורכה על האיזור המחוספס. נניח שהלחץ בתחתית הקופסה הוא אחיד.

א. [10 נקודות] ציירו גרף של עוצמת כוח החיכוך שפועל על הקופסה כתלות במיקומה. נקבע ציר x בכיוון ימין וראשית הציר בנקודה בין המשטח החלק והמחוספס. בגרף ציינו את מיקום הקופסה כמיקום הדופן הימנית שלה.

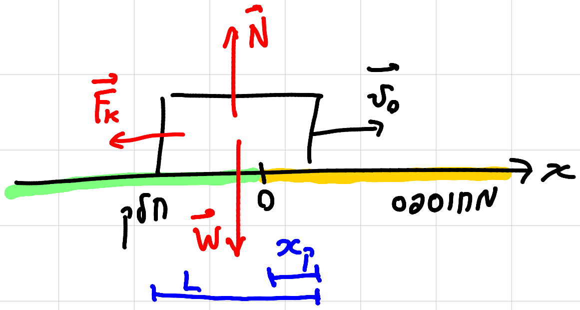
ב. [10 נקודות] מהו ערכו של מקדם החיכוך הקינטי μ_k בין הקופסה למשטח המחוספס?



2

$L = \frac{2}{3} m$

$v_0 = 2 m/s$



א

כוח החיכוך שפועל על הקופסה תלוי בכוח הנורמל של החלק היחסי של הקופסה שנמצא על האיזור המחוספס, הרי הנורמל על החֵלק החָלק לא יתרום כלום לכוח החיכוך.

מכיוון שהקופסה היא מלבנית והצפיפות שלה אחידה (הלחץ בתחתית אחיד), הנורמל יהיה מתכונתי לחלק שנמצא על השטח המחוספס.

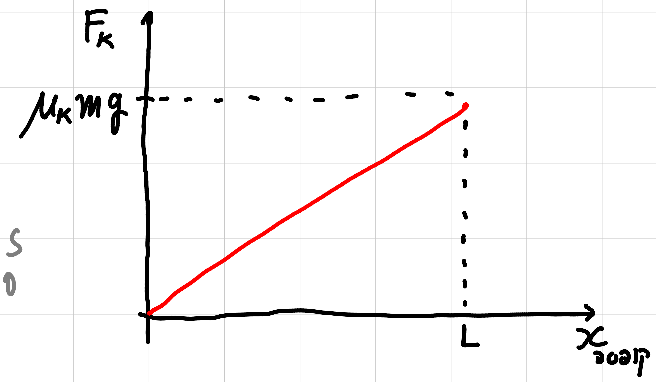
מיקום הקופסה

$$N = mg \longrightarrow N_{מחוספס} = N \cdot \frac{x_ק}{L} = \frac{mg}{L} x_ק$$

$$F_k = \mu_k \cdot N_{מחוספס} = \frac{\mu_k m g}{L} \cdot x_ק$$

$6m \sim$

ניתן למצוא את
זה אחרי שפותרים את
סעיף ב'.



ב נשתמש בשימור אנרגיה: $E_1 + W_{NC} = E_2$

$$E_1 = K_1 = \frac{m v_0^2}{2}$$

$$E_2 = 0$$

$$W_{NC} = -\left(\text{השטח מתחת לגרף}\right) = -\frac{1}{2} L \mu_k m g$$

העבודה שלילית:
כוח חיכוך כלפי שמאל
והעתק כלפי ימין.

$$\frac{\cancel{m} v_0^2}{\cancel{2}} - \frac{L \mu_k \cancel{m} g}{\cancel{2}} = 0$$

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{Lg} = 0.61$$

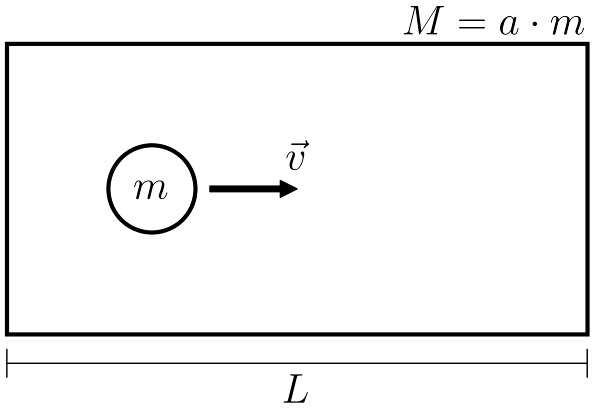
שאלה 3 [30 נקודות]

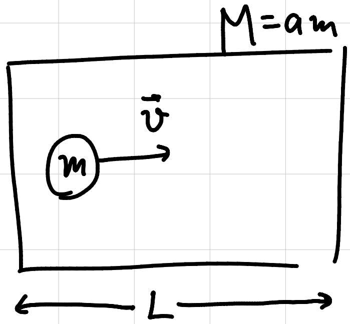
כדור שמסתו m נע ימינה במהירות קבועה v בתוך מסגרת מלבנית במנוחה, במקביל לצלע שאורכה L. מסת המסגרת היא $M = a \cdot m$, ($a > 0$). לאחר זמן מסוים הכדור מתנגש חזיתית ואלסטית במסגרת. התנועה היא במישור אופקי ללא חיכוך.

א. [10 נקודות] רשמו את הנוסחאות של חוקי השימור הרלוונטיים בהתנגשות. גזרו מהנוסחאות האלה ביטויים עבור מהירות הכדור ומהירות המסגרת מיד לאחר ההתנגשות. ניתן להיעזר בנוסחאות בסוף המבחן.

ב. [10 נקודות] בהתחשב לתשובה שקיבלתם בסעיף א', תארו את ההתנגשות הזאת לכל אחד משלושת המצבים הבאים: בגבול $a \to \infty$, עבור $a = 1$, ובגבול $a \to 0$.

ג. [10 נקודות] עבור ערך כלשהו של $a > 0$, כמה זמן יעבור בין ההתנגשות הראשונה לשנייה? בטאו את תשובתכם בצורה פרמטרית, בעזרת הנתונים של הבעיה.





$v_{A1}=v$
$v_{B1}=0$
$m_A=m$
$m_B=am$

(3) נקרא לכדור A ולמסגרת B.
נקרא למצב לפני ההתנגשות 1,
ולמצב אחרי ההתנגשות 2.

א) עלינו למצוא את v_{A2}, v_{B2}

קיים שימור תנע קווי ושימור אנרגיה קינטית (התנגשות אלסטית).

שימור תנע → $P_1=P_2$

$$m_A v_{A1} + m_B \cancel{v_{B1}}^{0} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \longrightarrow m_A(v_{A1}-v_{A2}) = m_B v_{B2} \quad (1)$$

שימור אנרגיה קינטית → $K_1=K_2$

$$\frac{m_A v_{A1}^2}{\cancel{2}} + \frac{m_B \cancel{v_{B1}^2}^{0}}{\cancel{2}} = \frac{m_A v_{A2}^2}{\cancel{2}} + \frac{m_B v_{B2}^2}{\cancel{2}}$$

$$(2) \qquad m_A(v_{A1}^2 - v_{A2}^2) = m_B v_{B2}^2$$

$$\underline{m_A(v_{A1}-v_{A2})}(v_{A1}+v_{A2}) = m_B v_{B2}^2$$

$$\cancel{m_B}\cancel{v_{B2}}(v_{A1}+v_{A2}) = \cancel{m_B} v_{B2}^{\cancel{2}} \longrightarrow v_{B2} = v_{A1}+v_{A2}$$

נציב את הביטוי הנ"ל אל תוך משוואה (1):

$$m_A(v_{A1}-v_{A2}) = m_B(v_{A1}+v_{A2})$$

$$v_{A2}(m_B+m_A) = v_{A1}(m_A-m_B) \longrightarrow v_{A2} = v_{A1}\cdot\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B} \Rightarrow \boxed{v_{A2} = v\,\frac{(1-a)}{1+a}}$$

$$v_{B2} = v_{A1}+v_{A2} = v_{A1} + v_{A1}\cdot\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B} = v_{A1}\left(\frac{m_A+\cancel{m_B}+m_A-\cancel{m_B}}{m_A+m_B}\right)$$

$$v_{B2} = v_{A1}\cdot\frac{2m_A}{m_A+m_B} \Longrightarrow \boxed{v_{B2} = v\,\frac{2}{1+a}}$$

ניתן לקבל את אותה התוצאה מתוך הצבה של $(m_A=m, m_B=am, v_A=v, v_B=0)$
לתוך המשוואות שניתנו בסוף המבחן:

$$u_A = v_{A2} = \frac{v(m-am)+0}{m+am} = v\,\frac{(1-a)}{1+a}$$

$$u_B = v_{B2} = v\cdot\frac{2m}{m+am}+0 = v\cdot\frac{2}{1+a}$$

עוד דרך לקבל את הביטויים עבור המהירויות היא להציב
את הנתונים של הבעיה כבר בנוסחאות (1) ו-(2):

$m_A=m,\ m_B=am,\ v_{A_1}=v$

(1) $m_A(v_{A_1}-v_{A_2})=m_B v_{B_2} \longrightarrow \cancel{m}(v-v_{A_2})=a\cancel{m}v_{B_2} \to v_{A_2}=v-av_{B_2}$

(2) $m_A(v_{A_1}^2-v_{A_2}^2)=m_B v_{B_2}^2 \to \cancel{m}(v^2-v_{A_2}^2)=a\cancel{m}v_{B_2}^2$

$$v^2=v_{A_2}^2+av_{B_2}^2$$

$$v^2=(v-av_{B_2})^2+av_{B_2}^2$$

$$\cancel{v^2}=\cancel{v^2}+a^2v_{B_2}^2-2vav_{B_2}+av_{B_2}^2$$

$$v_{B_2}(av_{B_2}-2v+v_B)=0$$

קיימים שני פתרונות: $v_{B_2}=0$ לא מעניין, בה כיוון לא הייתה התנגשות
בכלל... הפתרון השני הוא

$$v_{B_2}(a+1)=2v \longrightarrow \boxed{v_{B_2}=\frac{2v}{a+1}}$$

נציב את זה לתוך ונקבל:

$$v_{A_2}=v-a\left(\frac{2v}{a+1}\right)=\frac{v(a+1)-2av}{a+1}$$

$$v_{A_2}=v\cdot\frac{a+1-2a}{a+1}\rightarrow\boxed{v_{A_2}=v\cdot\frac{(1-a)}{1+a}}$$

ב

$a\to\infty$: מסת המסגרת גדולה בהרבה ממסת הכדור.

בגבול $a\to\infty$ המסגרת נשארת במנוחה, והכדור חוזר חזרה באותה המהירות שהייתה לו לפני ההתנגשות.

$$\lim_{a\to\infty} v_{Bz} = \lim_{a\to\infty} v\cdot\frac{2}{1+a} = 0$$

$$\lim_{a\to\infty} v_{Az} = \lim_{a\to\infty} v\frac{(1-a)}{1+a} = \lim_{a\to\infty} v\frac{a}{a}\frac{\left(\frac{1}{a}-1\right)}{\left(\frac{1}{a}+1\right)} = -v$$

$a=1$: מסת המסגרת שווה למסת הכדור.

$$v_{Bz} = v\,\frac{2}{1+1} = v$$

$$v_{Az} = v\,\frac{(1-1)}{1+1} = 0$$

הכדור נעצר, והמסגרת נוסעת ימינה במהירות v.

$a\to 0$: מסת המסגרת זניחה $(a=0)$ ביחס למסת הכדור.

$$\lim_{a\to 0} v_{Bz} = \lim_{a\to 0} v\,\frac{2}{1+a} = 2v$$

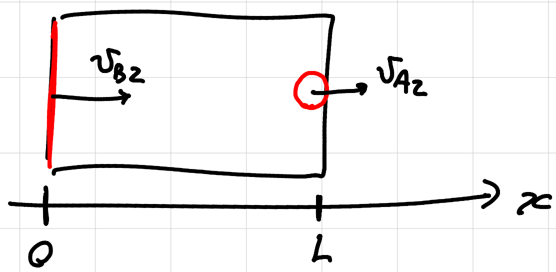
$$\lim_{a\to 0} v_{Az} = \lim_{a\to 0} v\,\frac{(1-a)}{1+a} = v$$

הכדור ממשיך לנסוע ימינה באותה המהירות שהייתה לו בעבר, והמסגרת נוסעת ימינה במהירות $2v$.

ג

$$v_{Az} = v\,\frac{(1-a)}{1+a}$$

$$v_{Bz} = v\,\frac{2}{1+a}$$



ההתנגשות השניה תהיה בין הכדור והדופן השמאלית של המלבן. נגדיר ציר x כפי שמצויר בציור למעלה. נשתמש בנוסחה $x(t)=x_0+vt$

$$\left.\begin{aligned} x_A(t) &= L + v_{Az}t \\ x_B(t) &= 0 + v_{Bz}t \end{aligned}\right\}$$

$x_A(T) = x_B(T) \rightarrow L + v_{Az}T = v_{Bz}T$

התנגשות!

$T(v_{Bz}-v_{Az}) = L \rightarrow T = L/(v_{Bz}-v_{Az})$

$$T = \frac{L}{v\left[\frac{2-(1-a)}{1+a}\right]} = \frac{L}{v\left[\frac{1+a}{1+a}\right]} \longrightarrow \boxed{T = \frac{L}{v}}$$

שאלה 4 [15 נקודות]

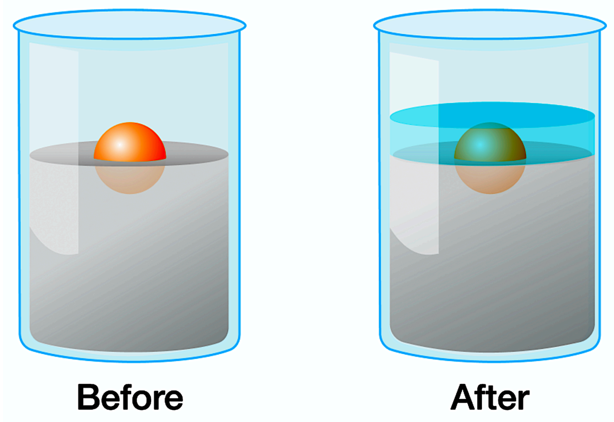
כדור צף בכספית, כפי שמתואר בציור בצד שמאל. אחר כך שופכים מים אל תוך המיכל כך שמפלס המים מכסה את הכדור בשלמותו. איך **המיקום האנכי של הכדור** השתנה אחרי שפיכת המים?

א. הוא לא השתנה.

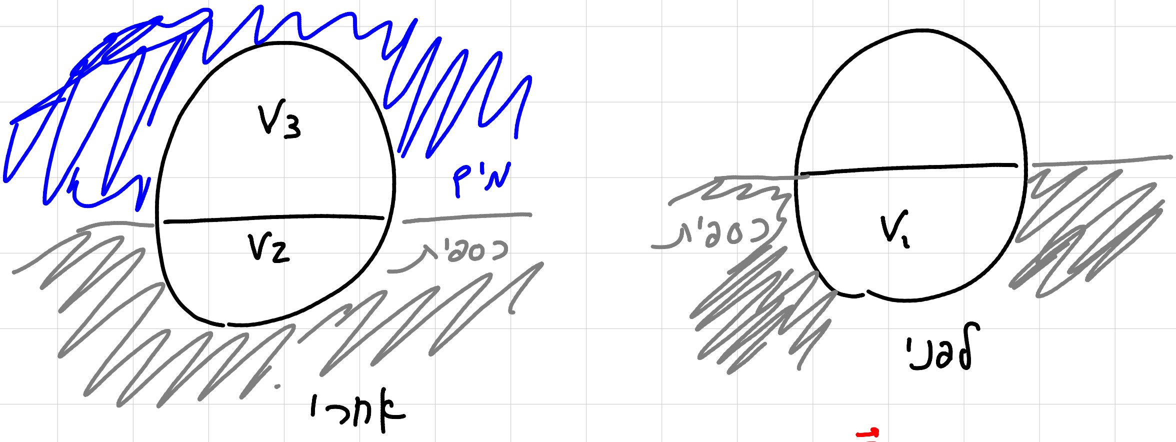
ב. הוא עלה.

ג. הוא ירד.

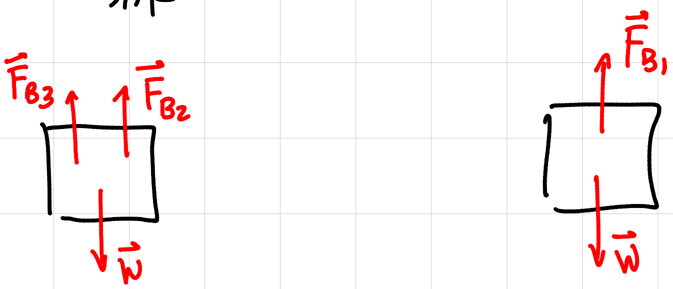
נמקו את תשובתכם.



4



דיאגרמת גוף חופשי:



שיווי משקל:

$$F_{B2}+F_{B3}=W \qquad F_{B1}=W$$

$$\rho_{Hg}V_2 g+\rho_{H_2O}V_3 g=W \qquad \rho_{Hg}V_1 g=W$$

$$\rho_{Hg}V_2 g+\rho_{H_2O}V_3 g=\rho_{Hg}V_1 g \longrightarrow \underbrace{\rho_{Hg}(V_1-V_2)}_{\text{כמות חיובית}}=\underbrace{\rho_{H_2O}V_3}_{\text{כמות חיובית}}$$

לכן: $V_1-V_2>0 \longrightarrow V_1>V_2$

מכאן אפשר להסיק שהכדור עלה!

הסבר אחר:

במצב "לפני" הכדור דוחק נפח V_1 של כספית, דבר שיוצר כוח ציפה, F_{B1}, ודוחק אוויר, שאפשר להזניח את צפיפותו ביחס לכספית ולמים, לכן אין כוח ציפה.

נניח עתה שנחזיק את הכדור במקומו ונשפוך את המים. הכדור ידחק פחות אוויר לטובת דחיקה של מים (או כספית). דבר זה רק יכול להגדיל את כוח הציפה שפועל על הכדור. לכן, אם נשחרר את הכדור, הוא בוודאות יעלה בשל חוסר האיזון בין כוח המשקל וכוח הציפה הגדול.

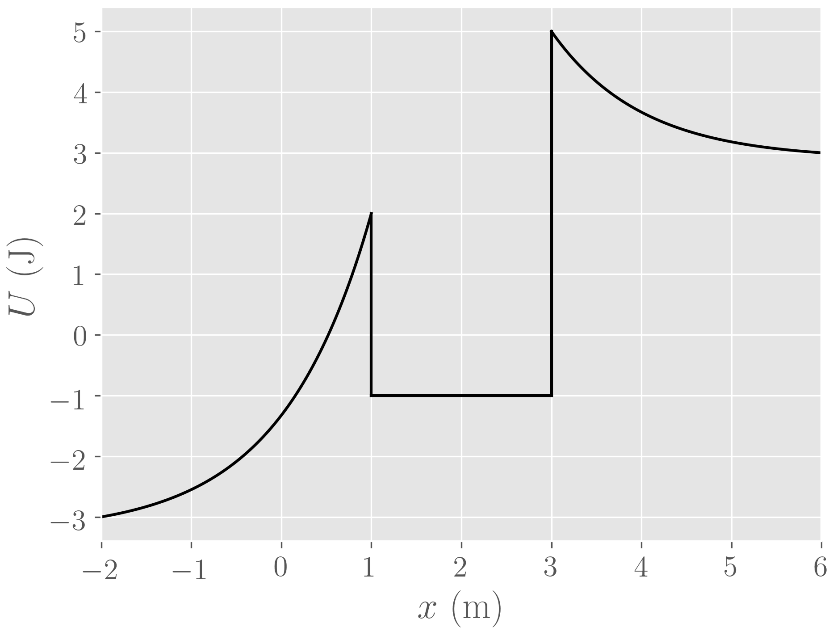
שאלה 5 [20 נקודות]

בתמונה למטה מוצג גרף אנרגיה פוטנציאלית עבור גוף בעל מסה $3\ \mathrm{kg}$. הגוף נזרק מנקודה $x = 2\ \mathrm{m}$ לכיוון ימין במהירות v.

א. [5 נקודות] לאיזה טווח ערכים של v הגוף יצליח לברוח מבור האנרגיה הפוטנציאלית לכיוון שמאל?

ב. [5 נקודות] לאיזה טווח ערכים של v הגוף יצליח לברוח מבור האנרגיה הפוטנציאלית לכיוון ימין?

ג. [10 נקודות] מה יהיה זמן המחזור של הגוף כאשר הוא נמצא בתוך בור האנרגיה הפוטנציאלית, ויש לו אנרגיה מכנית שווה לאפס ג'אול?



בהצלחה!

נוסחאות

קינמטיקה

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

כוחות ואנרגיה

$$\vec{F}^{\text{net}} = \Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

עבור כוח קבוע: $W = F\Delta x$

$$E = K + U_G + U_{EL}$$

$$E_1 + W_{NC} = E_2$$

הספק: $P = \frac{W}{\Delta t}$

$$F = -\frac{d}{dx}U(x)$$

תנע

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

עבור כוח קבוע: $\vec{J} = \vec{F}\Delta t$

$$u_A = v_A\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} + v_B\frac{2m_B}{m_A + m_B}$$

$$u_B = v_A\frac{2m_A}{m_A + m_B} + v_B\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}$$

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

זורמים

$$P = P_0 + \rho g h$$

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constant}$$

(5)

$m = 3kg$

$x_0 = 2m$

$v_0 = v$ ימינה

א הכדור יברח שמאלה אם האנרגיה המכנית שלו $E > 2J$. אם האנרגיה תהיה $E > 5J$ אז הוא יברח ימינה, אם לא, הגבול הוא: $2J < E < 5J$. ידוע כי $U(x=2) = -1J$

עבור $E = 2J$:

$$E = K + U \rightarrow K = E - U = 2-(-1) = 3$$

$$\frac{mv^2}{2} = 3 \rightarrow v = +\sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}\ m/s$$

חיובי כי הכדור נוסע ימינה

עבור $E = 5J$:

$$K = E - U = 5-(-1) = 6$$

$$\frac{mv^2}{2} = 6 \rightarrow v = +\sqrt{\frac{12}{3}} = 2\ m/s$$

לכן:

$$\sqrt{2} < v < 2 \quad (m/s)$$

ב תרגיל כזה, אבל הפעם נרצה $E > 5J$.

לכן: $v > 2m/s$

ג בבור $U = -1J$.

$$E = K + U = 0J$$

$$K = 0 - U = 1J = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{3}}\ m/s$$

זהו גודל המהירות של הגוף כאשר הוא נמצא בתחתית הבור. כמה זמן לוקח לגוף לחזור לאותו המצב? הוא צריך לנסוע פעמיים את אורך הבור (הלוך ושוב), כלומר, $2 \cdot 2m = 4m$. זמן המחזור:

$$x = vt$$

$$t = \frac{x}{v} = \frac{4}{\sqrt{2/3}} \rightarrow \boxed{t = 4.9s}$$